978-3-7910-3369-3 Albrecht, Finanzmathematik für Wirtschaftswissenschaftler/
3., überarbeitete und erweiterte Auflage

1 Grundlagen

Lernziele

- Die Finanzmathematik analysiert zeitliche Entwicklungen finanzieller Größen. Hierfür lernen Sie Zahlungsstrommodelle kennen.
- Die Zinsrechnung ist das Fundament der Finanzmathematik. Sie können mit den grundlegenden Zinsmodellen umgehen.
- Sie beherrschen die Konzepte Barwert und Kapitalwert als Basis für die Bewertung von Zahlungsströmen.

1.1 Einführung

1.1.1 Finanzmathematische Problemstellungen

Bevor wir uns näher mit grundlegenden Fragen finanzmathematischer Problemstellungen befassen, betrachten wir zur Einführung zunächst zwei motivierende Praxisbeispiele.

Beispiel 1.1 **Festgeldanlage**

Festgeldanlage

▸▸▸ In $t = 0$ werde eine Festgeldanlage bei einer Bank mit einer Laufzeit von 6 Monaten getätigt. Angelegt werden 10 000 Euro, die Rückzahlung betrage 10 200 Euro. Der resultierende Zahlungsstrom aus Sicht des Anlegers lautet (Periode = 1 Monat):

$Z = \{-10\,000, 0, 0, 0, 0, 0, 10\,200\}$.

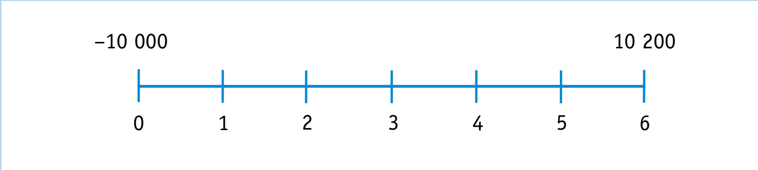
Aus Sicht der Bank lautet der Zahlungsstrom entsprechend

$Z = \{10\,000, 0, 0, 0, 0, 0, -10\,200\}$. ◂◂◂

Wir benutzen die Ergebnisse des vorstehenden Beispiels noch, um ein erstes Beispiel zur Illustration eines Zahlungsstroms zu geben. Unterstellt wird dabei die Sicht des Anlegers. Illustriert wird der zugehörige Zahlungsstrom in Abbildung 1-1.

Abb. 1-1

Illustration Festgeldanlage (Anlegersicht)



Beispiel 1.2 **Endfälliger Bankkredit**

Bankkredit

▸▸▸ In $t = 0$ werde ein Kredit von 100 000 Euro bei einer Bank aufgenommen und nach 5 Jahren zu einem Betrag von 133 822.56 Euro (inklusive aufgelaufener Kreditzinsen) endfällig getilgt.

Der resultierende Zahlungsstrom aus Sicht des Kreditgebers (Bank) lautet:

$Z = \{-100\,000, 0, 0, 0, 0, 133\,822.56\}$.

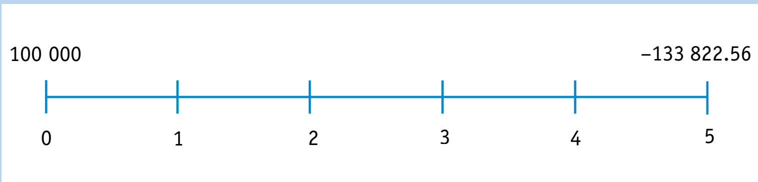
Der resultierende Zahlungsstrom aus Sicht des Kreditnehmers ist entsprechend

$Z = \{100\,000, 0, 0, 0, 0, -133\,822.56\}$. ◂◂◂

Der Zahlungsstrom des Beispiels 1.2 lässt sich aus Sicht des Kreditnehmers wie in Abbildung 1-2 dargestellt illustrieren.

Abb. 1-2

Illustration endfälliger Bankkredit (Sicht Kreditnehmer)



Die vorstehenden einführenden Beispiele sind grundsätzlich zwei erste einfache Beispiele für finanzwirtschaftliche Vorgänge. Die Analyse solcher finanzwirtschaftlichen Vorgänge ist der zentrale Gegenstand der Finanzmathematik. Typische Beispiele für finanzwirtschaftliche Vorgänge sind:

- Sparprozesse
- Formen der Kapital-/Geld-/Vermögensanlage (Immobilien, Aktien, Zinstitel, Investmentfonds)

- Formen der Kapital-/Geld-/Kreditaufnahme (Bankkredit, Konsumentenkredit, Automobilfinanzierung, Emission von Zinstiteln)
- Verrentung von Kapital.

Zahlungsströme, Wertentwicklungen

Finanzwirtschaftliche Vorgänge sind grundsätzlich mit zeitlichen Entwicklungen finanzieller Größen (verzinsliche Ansammlung von Kapital, Vermögensentwicklungen, Entwicklung von Einkünften, Entwicklung von Schulden/Verpflichtungen) verbunden. Sie lösen Zahlungsströme (Folgen von Zahlungen oder Folgen von Wertgrößen) aus.

Bewertung

Zentrale Problembereiche der Finanzmathematik sind daher die Analyse der zeitlichen Entwicklung finanzieller Größen sowie die Bewertung (Ermittlung eines Wertes bzw. Preises, Ermittlung einer Rendite) solcher finanzieller Entwicklungen. Dies geschieht etwa zu Zwecken der Ermittlung von Kauf-/Verkaufspreisen (wie hoch ist der faire bzw. angemessene Preis?), der Vermögensbewertung oder als Basis der Entscheidung über eine Vermögensanlage bzw. Kapitalaufnahme (welche Anlage besitzt die höchste Rendite bzw. welcher Kredit die geringsten Kreditkosten?).

Finanzinvestitionen

Hinsichtlich der wirtschaftlichen Anwendungen befassen wir uns im vorliegenden Text dabei primär mit Finanzinvestitionen (auch: Investments, Kapitalanlage) und Basisfragen der Kapitalaufnahme (Tilgungsrechnung). Sachinvestitionen, beispielsweise die Anschaffung einer Maschine, werden hingegen nur gestreift. Ihre Behandlung ist Gegenstand der Investitionsrechnung. Gleiches gilt für weitergehende Fragen der Finanzierung, etwa im Kontext der Unternehmensfinanzierung.

1.1.2 Zahlungsströme

Analyse von Zahlungsströmen

Wie bereits ausgeführt, sind finanzwirtschaftliche Vorgänge mit zeitlichen Entwicklungen finanzieller Größen (verzinsliche Ansammlung von Kapital, Vermögensentwicklung, Entwicklung von Einkünften, Entwicklung von Schulden/Verpflichtungen) verbunden. Aus einer mehr formalen Perspektive gesehen, beschäftigt sich die Finanzmathematik daher mit der Analyse von Zahlungsströmen bzw. Wertentwicklungen und stellt Methoden für entsprechende Analysen bereit. Im Weiteren sprechen wir der Einfachheit halber generell von einem Zahlungsstrom (englisch: Cash Flow), auch dann, wenn keine konkreten Zahlungen erfolgen, sondern beispielsweise nur Werte oder Preise zu sukzessiven Zeitpunkten beobachtet bzw. ermittelt werden.

Basis-Zeitmodell

In einem ersten Schritt ist es vor diesem Hintergrund daher erforderlich, Modelle zur Quantifizierung von Zahlungsströmen zu entwickeln. Zu spezifizieren ist dabei zunächst, zu welchen Zeitpunkten die Zahlungen erfolgen. Im einfachsten Fall (*Basis-Zeitmodell*) gehen wir von den Zeitpunkten

$$\{0, 1, 2, \ldots, T\}$$

als Zahlungszeitpunkten aus.

Die Zahlungszeitpunkte sind in diesem Zeitmodell äquidistant, d. h. die Perioden zwischen den Zeitpunkten besitzen alle eine identische Länge. Standardbeispiele für im Weiteren betrachtete Perioden sind Monate und Jahre. Der Zeitpunkt 0 entspricht dabei typischerweise dem Zeitpunkt der Anlage oder dem Beginn der Planungsperiode (beispielsweise dem aktuellen Zeitpunkt, kurz: heute).

Die Zahlungen sind dabei entweder

Ein- und Auszahlungen

- Einzahlungen $ez_t \geq 0$ (Geldfluss mit einem positivem Vorzeichen) zum Zeitpunkt t oder
- Auszahlungen $az_t \geq 0$ (Geldfluss mit einem negativem Vorzeichen) zum Zeitpunkt t oder
- Salden $ez_t - az_t$ von Ein- und Auszahlungen.

Im Rahmen einer allgemeineren Notation unterscheiden wir dabei nicht mehr zwischen Ein- und Auszahlungen oder Salden von Ein- und Auszahlungen, sondern bezeichnen generell mit z_t die Zahlung zum Zeitpunkt t. Gilt zu einem Zeitpunkt $z_t = 0$, so erfolgt zu diesem Zeitpunkt entweder keine Zahlung oder aber Ein- und Auszahlungen bestehen in gleicher Höhe und weisen somit einen Saldo von Null auf.

Zu unterscheiden sind bei Betrachtung der Zeitmenge $\{0, 1, \ldots, T\}$

Vor- und nachschüssige Zahlungen

- *Vorschüssige Zahlungen:* Die Zahlungen $z_0, z_1, \ldots, z_{T-1}$ erfolgen jeweils zu Beginn der Perioden 1, …, T.
- *Nachschüssige Zahlungen:* Die Zahlungen $z_1, \ldots, z_T$ erfolgen jeweils am Ende der Perioden 1, …, T.

Abbildung 1-3 illustriert das vorstehend dargelegte Zeit- und Periodenmodell im Falle vor- wie nachschüssiger Zahlungen.

Standardfälle

Ob eine Zahlung vor- oder nachschüssig ist, ergibt sich aus dem jeweiligen Problemkontext. Wenden wir uns einigen typischen Fällen zu.

Fall 1 beinhaltet den Zahlungsstrom $ez_1, \ldots, ez_T$, die entsprechende Investition ist durch nachschüssige positive Rückflüsse gekennzeichnet. Aber auch entsprechende vorschüssige Rückflüsse sind denkbar, etwa die in Abschnitt 2.1 behandelten vorschüssigen Rentenzahlungen.

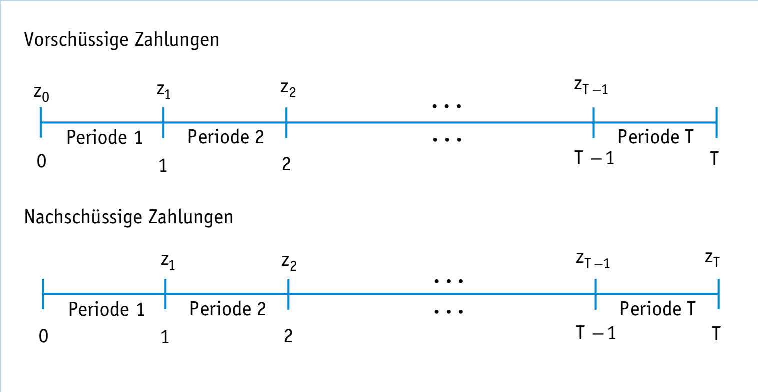
Fall 2 beinhaltet den Zahlungsstrom $\{-az_0, ez_1, \ldots, ez_T\}$. Zur Durchführung der Investition (bzw. zum Erwerb des Zahlungsstroms $\{ez_1, \ldots, ez_T\}$) ist eine (vorschüssige) Anfangsauszahlung notwendig. Dieser folgen dann nur noch Einzahlungen. Der Fall 2 entsteht aus dem Fall 1, indem man diesen um die anfängliche Investitionsauszahlung bzw. um den anfänglichen Preis der Investition ergänzt.

Standardinvestition, Standardinvestment

Eine leichte Verallgemeinerung von Fall 2 stellt der Zahlungsstrom $\{-az_0, z_1, \ldots, z_T\}$ dar, hier folgen auf eine vorschüssige Anfangsauszahlung nachschüssige Zahlungssalden. Ein zentraler Fall hierbei ist das Vorliegen ausschließlich nichtnegativer Zahlungssalden ($z_t \geq 0$ für $t = 1, \ldots, T$), von denen mindestens einer positiv ($z_t > 0$) ist. Wir sprechen in diesem Fall von einer *Standardinvestition* bzw. in unserem primären Anwendungsfall von einem *Standardinvestment*.

Abb. 1-3

Diskretes Zeit- und Periodenmodell



Alle vorstehend behandelten Zahlungsströme sind unter den allgemeinen Zahlungsstrom

$$Z = \{z_0, z_1, ..., z_T\}$$

subsumierbar, wenn man den Spezialfall $z_0 = 0$ zulässt.

Der Zahlungsstrom $Z = \{z_0, z_1, ..., z_T\}$ ist der *Basis-Zahlungsstrom*, von dem wir im Weiteren zunächst ausgehen.

Basis-Zahlungsstrom

Eine weitere Konsequenz des diskreten Zeit- und Periodenmodells in Abbildung 1-3 ist es, dass keine unterperiodigen Zahlungen erfolgen. Liegen im Anwendungsfall unterperiodige Zahlungen vor, so muss – zumindest bei Verwendung dieses Zeit- und Periodenmodells – eine Vereinbarung darüber getroffen werden, ob eine solche Zahlung dem Periodenanfang oder dem Periodenende zugeordnet wird.

Wir kommen damit zu einer Reihe von weiteren Praxisbeispielen.

Festzinstitel, Bond

Ein Festzinstitel bzw. Bond (in Abhängigkeit von der empirischen Ausgestaltungsform auch: Schuldverschreibung, Obligation, Anleihe, Rententitel) ist im Standardfall (Standardbond, Straight Bond) gekennzeichnet durch eine feste Laufzeit, jährlich nachschüssige Zinszahlungen (Kupon) in fester Höhe über die gesamte Laufzeit sowie einer Rückzahlung des Kreditbetrags (Nennwert) am Ende der Laufzeit (endfällige Tilgung). Die jährlich gleich hohen Zinszahlungen werden durch Festlegung des sogenannten Nominalzinses des Bonds bestimmt und ergeben sich durch Multiplikation des Nennwerts mit diesem Nominalzins.

Beispiel 1.3 **Festzinstitel**

▸▸▸ In $t = 0$ wird ein Festzinstitel mit einer Laufzeit von 3 Jahren und mit einem Nennwert in Höhe von 50 000 Euro zu pari (d. h. zum Nennwert) erworben. Der Zinstitel weise einen jährlich nachschüssigen Nominalzins in Höhe von 5% des Nennwerts auf und werde endfällig getilgt.
Zahlungsstrom aus Sicht des Emittenten des Zinstitels:

$Z = \{50\,000, -2\,500, -2\,500, -52\,500\}$.

Zahlungsstrom aus Sicht des Anlegers (Investor) in den Zinstitel:

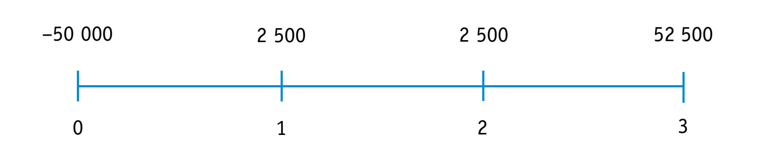
$Z = \{-50\,000, 2\,500, 2\,500, 52\,500\}$.

Aus Sicht des Anlegers in den Zinstitel liegt somit ein Standardinvestment vor. ◂◂◂

Der Zahlungsstrom des Beispiels 1.3 lässt sich aus Sicht des Anlegers wie in Abbildung 1-4 dargestellt illustrieren.

Abb. 1-4

Illustration Festzinstitel (Sicht Anleger)



Nullkuponanleihe, Zerobond

Eine *Nullkuponanleihe* bzw. ein *Zerobond* ist ein Zinstitel, bei dem keine Zinszahlungen erfolgen, sondern *nur* eine endfällige Tilgung. Die wegfallenden Zinszahlungen werden kompensiert durch die Vornahme eines Abschlags (Diskont) auf den vom Investor bei Kauf zu entrichtenden Preis. Weist der Rückfluss zum Tilgungstermin die Höhe 1 auf, so spricht man von einem *Einheitszerobond*.

Beispiel 1.4 **Nullkuponanleihe**

▸▸▸ In $t = 0$ werde die Nullkuponanleihe zu 79 209.37 Euro erworben und in $t = 4$ zu 100 000 Euro getilgt.
Resultierender Zahlungsstrom aus Sicht des Investors:

$Z = \{-79\,209.37, 0, 0, 0, 100\,000\}$.

Auch in diesem Fall liegt (aus Investorsicht) ein Standardinvestment vor. ◂◂◂

Beispiel 1.5 **Ratenkredit**

Ratenkredit

▸▸▸ Der Kredit aus Beispiel 1.2 werde nun nicht endfällig, sondern in fünf gleich hohen Raten (inkl. anteiliger Kreditzinsen) in Höhe von 23 000 Euro zurückbezahlt. Der resultierende Zahlungsstrom aus Sicht des Kreditnehmers lautet nun

$Z = \{100\,000, -23\,000, -23\,000, -23\,000, -23\,000, -23\,000\}$.

und aus Sicht der Bank entsprechend

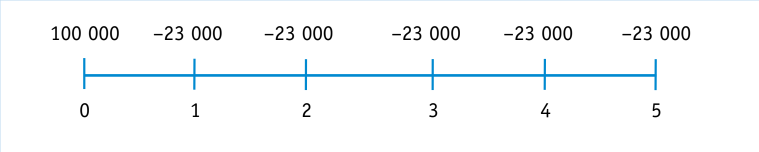
$Z = \{-100\,000, 23\,000, 23\,000, 23\,000, 23\,000, 23\,000\}$.

Erneut liegt – diesmal aus Sicht der Bank – ein Standardinvestment vor. ◂◂◂

Der Zahlungsstrom des Beispiels 1.5 lässt sich aus Sicht des Kreditnehmers wie in Abbildung 1-5 dargestellt illustrieren.

Abb. 1-5

Illustration Ratenkredit (Sicht Kreditnehmer)



Verallgemeinerter Zahlungsstrom

Wenden wir uns damit einem *verallgemeinerten Zahlungsstrom* zu. Im Rahmen des zugrunde liegenden Zeitmodells wird dabei die Äquidistanz der Zahlungen aufgegeben. Wir gehen dazu allgemein aus von Zahlungszeitpunkten der Form $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Dieser Ansatz erlaubt insbesondere die Erfassung von »unterperiodigen« (z. B.: unterjährigen) Zahlungen. Zum Zeitpunkt t_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) erfolgt nun eine Zahlung der Höhe $z(t_i)$, d. h., der verallgemeinerte Zahlungsstrom hat die generelle Form:

$Z = \{z(t_0), z(t_1), \ldots, z(t_n)\}$.

Zinskonventionen

Geht man, wie in praxi üblich, zu Zwecken der Zinsbestimmung von Jahren als Standardperioden aus, so stellt sich bei unterjährigen Zahlungsvorgängen die Frage nach der Erfassung von Teilperioden. Man spricht von *Tagzählungsmethoden* (*Day Count*) oder auch von *Zinskonventionen*. Dabei ist sowohl die Anzahl B der Tage eines Jahres festzulegen (Standardbeispiele: B = 365, B = 360) als auch die Anzahl A der Tage der Teilperiode. Man spricht dann von einer Tagzählungsmethode nach der Konvention A / B. Beispiele hierfür sind die Konventionen echt/echt bzw. actual/actual oder 30/360 oder echt/365. Echt (actual) bedeutet hierbei die exakte Bestimmung der Zinstage. Die Konvention 30/360 bedeutet beispielsweise, dass volle Monate zu 30 Zinstagen und das Jahr zu 12 Monaten (360 Tage) angesetzt werden (auch: kaufmännische Konvention). Eine eingehendere Darstellung der 30/360-Konvention befindet sich in Anhang 1A. Die 30/360-Konvention beinhaltet insbesondere die Vereinbarung, dass bei Monaten mit 31 Tagen der 31. Tag kein Zinstag ist.

Bei allen Konventionen gelte im Folgenden grundsätzlich, dass der erste Tag (Tag der Einzahlung) als voller Zinstag gilt, der letzte Tag (Tag der Auszahlung) jedoch nicht, d. h. es wird auf die Anzahl der verstrichenen Tage abgestellt. Alternativ kann man – mit gleichem Resultat – auch vereinbaren, dass der auf die Einzahlung folgende Tag als erster Zinstag gezählt wird und der Tag der Auszahlung als letzter Zinstag.

Beispiel 1.6 Day Count

Day Count

▸▸▸ Die Konvention sei echt/echt. Zwischen dem 27.02.13 und dem 10.04.13 liegen 2 + 31 + 9 = 42 Tage. Das Jahr 2013 hat 365 Tage und somit umfasst der Zeitraum 42/365 = 0.11507 Jahre.

Im Falle der Konvention 30/360 liegen hingegen zwischen dem 27.02.13 und dem 10.04.13 4 + 30 + 9 = 43 Tage, das Jahr wird zu 360 Tagen angesetzt und damit umfasst der Zeitraum 43/360 = 0.11944 Jahre. ◂◂◂

Beispiel 1.7 Unterjähriger Erwerb Zinstitel

Zinstitel

▸▸▸ Der Festzinstitel aus Beispiel 1.3 werde nicht bei Emission erworben, sondern erst nach 3 Monaten und zwar zu einem Preis von 50 625 Euro, die Konvention sei 30/360.

Zeitmodell: $t_0 = 0.25$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$.

Zahlungsstrommodell: $z(t_0) = -50\,625$, $z(t_1) = 2\,500$, $z(t_2) = 2\,500$, $z(t_3) = 52\,500$. ◂◂◂

Beispiel 1.8 Aktieninvestment

Aktieninvestment

▸▸▸ In $t = 0$ werde ein Aktieninvestment in Höhe von 10 000 Euro getätigt. Nach 6 bzw. 18 Monaten erfolgt eine Dividendenzahlung in Höhe von 200 bzw. 300 Euro und nach 27 Monaten werde das Aktieninvestment unter Realisierung eines Kursverlusts zu 9 000 Euro aufgelöst. Die Konvention sei 30/360.

Zeitmodell: $t_0 = 0$, $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1.5$, $t_3 = 2.25$

Zahlungsstrommodell: $z(t_0) = -10\,000$, $z(t_1) = 200$, $z(t_2) = 300$, $z(t_3) = 9\,000$. ◂◂◂

Thesaurierung

Bei einem thesaurierenden Investmentfonds bzw. einem Performanceindex (Beispiel: Deutscher Aktienindex, DAX) werden die Dividenden nicht ausgeschüttet, sondern reinvestiert.

Beispiel 1.9 Thesaurierender Investmentfonds

Thesaurierender Fonds

▸▸▸ In $t = 0$ werden für 10 000 Euro Anteile eines thesaurierenden Aktienfonds erworben und nach 21 Monaten verkauft, der Verkaufserlös betrage 13 500 Euro. Die Konvention sei 30/360.

Zeitmodell: $t_0 = 0$, $t_1 = 1.75$
Zahlungsstrommodell: $z(t_0) = -10\,000$, $z(t_1) = 13\,500$.
In Termen des verallgemeinerten Zahlungsstrommodells liegen bei den Beispielen 1.7 – 1.9 wiederum jeweils Standardinvestments vor. ◀◀◀

1.1.3 Zentrale Prämisse: Sichere Zahlungen

Entscheidungsmodell unter Sicherheit

Zentrale Prämisse des gesamten vorliegenden Textes ist, dass alle Zahlungen sicher (determiniert, deterministisch) sind, d. h. alle Zahlungen $z(t_i)$ sind hinsichtlich ihres Eintrittszeitpunkts und ihrer Höhe nach vollständig bekannt (*Entscheidungsmodell unter Sicherheit*). Falls der reale Zahlungsstrom jedoch indeterminiert ist, so ist dies eine Annahme zur vereinfachten Abbildung der Realität oder aber auch eine didaktische Vorstufe für komplexere Modellansätze.

Bei der Analyse der praktischen Relevanz sicherer Zahlungen sind zwei Sichtweisen zu unterscheiden.

Ex ante- bzw. Planungsperspektive

Planungsperspektive

Klammert man bei Festzinstiteln das »Ausfallrisiko« (Zahlungsunfähigkeit des Schuldners) aus und hält man den Titel bis zur Endfälligkeit, so resultiert ein solcher sicherer Zahlungsstrom (unsicher bleiben allerdings auch in diesem Fall die künftigen Wiederanlagebedingungen für die erfolgten Kuponzahlungen). Verkauft man den Titel vor Endfälligkeit, so resultiert jedoch ein Kursrisiko (Unsicherheit des Rückzahlungsbetrags zum Marktwert).

Bei Aktien sind die Kursentwicklungen grundsätzlich unsicher, in deutlich geringerem Ausmaß gilt dies für die Dividenden. Die Desinvestitionswerte sind bei einem Aktienengagement somit unsicher. Im Rahmen einer Planungsrechnung kann man sich in diesem Falle hilfsweise mit unterschiedlichen deterministischen Szenarien (z. B.: 3%, 7%, 10% jährliche Kursentwicklung) behelfen.

Ex post- bzw. Kontrollperspektive

Kontrollperspektive

Ex post, d. h. nach abgeschlossener Investition oder bei historischer Betrachtung von Investments (beispielsweise Kurszeitreihen), haben sich alle Zahlungen realisiert und sind damit determiniert.

1.2 Zinsrechnung

1.2.1 Einführung

Zins als Preis

Die Zinsrechnung bildet das Fundament der Finanzmathematik. Aus wirtschaftlicher Sicht erheben Banken (wie auch andere Kreditgeber) für Kapital, das sie als Darlehen oder Kredit ausleihen, *Sollzinsen*. Auf der anderen Seite vergüten sie für

Einlagen ihrer Kunden (beispielsweise Sparguthaben) *Habenzinsen*. Der erhobene bzw. der vergütete Zins kann somit als Preis (pro Zeiteinheit) für die Überlassung bzw. Anlage von Kapital aufgefasst werden.

Aus einer theoretischen Sicht besteht die grundlegende Problematik bei der Bewertung eines deterministischen Zahlungsstroms (beispielsweise) der Form $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_T\}$ oder $Z = \{z(t_0), z(t_1), \ldots, z(t_n)\}$ darin, dass die Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen, d. h. nicht direkt vergleichbar sind. Zentraler Schlüssel zur Vornahme einer Bewertung ist dann die Verwendung eines Modells für den Prozess der Kapitalverzinsung (Zinsmodell).

Wir gehen dabei im Rahmen des weiteren Lehrtexts stets von einem einheitlichen deterministischen Zins aus. Die Modellannahme der Sicherheit erstreckt sich damit gleichermaßen auf die Höhe der angenommenen Verzinsung. Der über die gesamte Periode bestehende einheitliche Zins (bzw. allgemeiner die in den einzelnen Subperioden bestehenden Zinsen) ist (bzw. sind) bekannt.

Vollkommener Kapitalmarkt

Als grundlegendes Zinsmodell betrachten wir im Weiteren das Modell eines *vollkommenen Kapitalmarkts* in diskreter Zeit mit einem Periodenzinssatz $r > 0$. Die Bedingung des vollkommenen Kapitalmarkts bedeutet dabei, dass zu r beliebig hohe Geldbeträge angelegt und ebenso beliebig hohe Kredite aufgenommen werden können. Soll- und Habenzinsen sind somit identisch. Diese nicht realitätskonforme Prämisse (in der Bankenpraxis ist der Sollzins immer höher als der Habenzins) dient der Vereinfachung der im Weiteren durchgeführten Berechnungen. Bei einem gespaltenen Zins wären Einzahlungen mit dem Habenzins zu bewerten und Auszahlungen mit dem Sollzins. Dies ist dem Grunde nach unproblematisch, führt aber zu komplexeren Ausdrücken. Aus diesem Grund verzichten wir im Weiteren auf diese erweiterte Vorgehensweise und arbeiten mit einem einheitlichen Soll- und Habenzins r. Dieser Zinssatz r ist dabei ferner fristigkeitsunabhängig, d. h. unabhängig von der Dauer der Kapitalanlage bzw. von der Laufzeit des Kredits. Der Fall fristigkeitsabhängiger Zinsen wird einführend in Anhang 3G dargestellt.

Soll- und Habenzins

Nominelle Zinsen

Anmerkung: Die im Haupttext betrachteten Zinsgrößen sind ausschließlich *nominelle* Zinsen. Sie bestimmen die nominelle Entwicklung des Vermögens (die Wertentwicklung bspw. in Euro oder US-Dollar). Neben diese rein nominelle Betrachtung tritt eine Analyse der Wertentwicklung in *Kaufkrafttermen* (reale Wertentwicklung), d. h. die Berücksichtigung der Wirkung der Inflation auf die Wertentwicklung des Vermögens. Die Grundlagen für eine solche Analyse werden in Anhang 1E bereitgestellt.

Zinsgrößen

Wir führen zunächst eine Reihe von Standardnotationen ein:

- die Größe p bezeichne den *Zinsfuß* (z. B.: 5),
- die Größe $r = p/100$ bezeichne den *Zinssatz* (z. B.: 5% bzw. 0.05),
- die Größe $q = 1 + r$ bezeichne den *Aufzinsungsfaktor* (z. B.: 1.05),
- die Größe $v = q^{-1} = 1/q = 1/(1+r)$ bezeichne den *Abzinsungs-* bzw. *Diskontierungsfaktor* (z. B.: $(1.05^{-1} = 0.9524)$.
- Ferner bezeichne die Größe K_0 im Falle einer Kapital- bzw. Vermögensanlage den anfänglichen Stand eines Kapitals bzw. die anfängliche Höhe eines Ver-

mögens; im Falle einer Kapitalaufnahme (Kredit, Darlehen, Hypothek) entspricht K_0 dem anfänglichen Stand einer Schuld bzw. der anfänglichen Höhe des Kredits.

- Die Größe K_T bezeichne schließlich den Stand des Kapitals (Höhe des Vermögens) bzw. den Stand der Schuld (Höhe der Kreditverpflichtung) am Ende des betrachteten Zeitraums von T Perioden. Die Größe K_T wird auch als *Endwert* bezeichnet.

Der Zinssatz für eine bestimmte Periode spezifiziert dabei den Preis für die Überlassung von Kapital für diese Periode.

Basis-Zinsmodell

Das im Weiteren betrachtete *Basis-Zinsmodell* kann nun wie folgt konkretisiert werden:

- Zeitmodell $\{0,1,\ldots,T\}$, die Standardperiode ist dabei ein Jahr
- nachschüssige Verzinsung zum Per Annum (p. a.)-Zinssatz r (Zinsgutschrift am Periodenende)
- Zinskapitalisierung (die Zinszahlungen werden nicht ausgeschüttet, sondern erhöhen den Anlagebetrag bzw. die Schuld); man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem *Zinseszins*.

Die fundamentale Annahme der Zinskapitalisierung führt – wie wir sehen werden – auf Wertentwicklungen, die einer geometrischen Folge entsprechen, d. h. einer Folge der Form $\{q^t\}$. Man spricht deshalb auch von einer *geometrischen Verzinsung*.

1.2.2 Zinseszinsrechnung (geometrische Verzinsung)

Endwertbestimmung

Die Wertentwicklung des anfänglichen Kapitals (der anfänglichen Schuld) K_0 über T Perioden unter Zugrundelegung des vorstehend definierten Basis-Zinsmodells führt dann zu dem folgenden Kapitalstand (Schuldenstand) $K_T = K_T(r)$ zum Zeitpunkt T (*Endwert*):

$$(1.1)\quad K_T(r) = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^T = K_0 \cdot (1+r)^T = K_0 \cdot q^T .$$

Periodenweise Aufzinsung

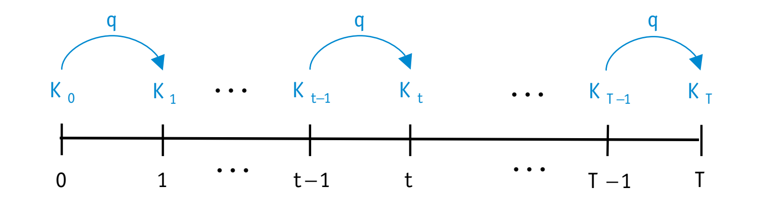
Zur Begründung dieses Zusammenhangs betrachten wir die Folge $K_0, K_1, \ldots, K_T$ der jährlichen Wertentwicklungen. Die Wertentwicklung zweier aufeinander folgender Jahre ist dabei gekennzeichnet durch

$$(1.2)\quad K_t = K_{t-1} + K_{t-1} \cdot r = K_{t-1} \cdot (1+r) = K_{t-1} \cdot q .$$

K_{t-1} ist dabei der Kapitalstand am Anfang der Periode t und $K_{t-1} \cdot r$ der am Ende der Periode t gutgeschriebene Zinsbetrag. Dieser grundlegende Zusammenhang wird illustriert in Abbildung 1-6.

Abb. 1-6

Periodenweise Aufzinsung



Periodenübergreifende Aufzinsung

Aus der Verknüpfung der einperiodigen Wertentwicklungen resultiert:

$K_1 = K_0 \cdot q$
$K_2 = K_1 \cdot q = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2$
$K_3 = K_2 \cdot q = (K_0 \cdot q^2) \cdot q = K_0 \cdot q^3$, etc.

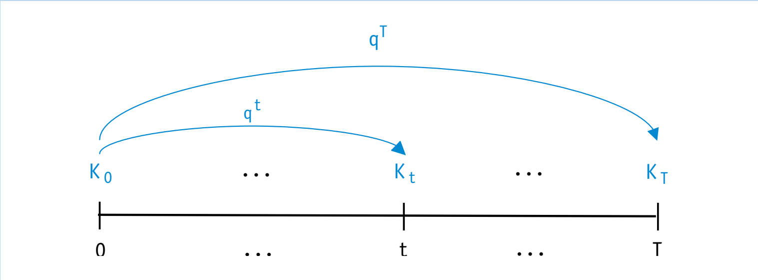
Dies führt zu der allgemeinen Wertentwicklung

(1.3) $K_t = K_t(r) = K_0 \cdot (1 + r)^t = K_0 \cdot q^t$,

bei der Betrachtung von T Perioden somit zur Wertentwicklung gemäß Beziehung (1.1). Die Beziehungen (1.3) und (1.1) werden illustriert in Abbildung 1-7.

Abb. 1-7

Periodenübergreifende Aufzinsung



Zinseszinseffekt, geometrische Verzinsung

Der durch die vorstehenden Beziehungen beschriebene Effekt, dass nicht nur der anfängliche Kapitalbetrag eine Verzinsung erfährt, sondern auch die jeweils aufgelaufenen Zinsen, wird auch als *Zinseszinseffekt* bezeichnet. Die entsprechende Form der Verzinsung bezeichnet man als geometrische Verzinsung oder Verzinsung mit Zinseszins (englisch: compound interest).