

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>0 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Die Inversion am Kreis bzw. an der Kugel</b>	<b>9</b>
1.1 Grundlegende Eigenschaften . . . . .	9
1.2 Stereographische Projektion . . . . .	16
1.3 Das Übertragungsprinzip . . . . .	18
1.4 Kreisverwandtschaften . . . . .	22
1.5 Möbiustransformationen . . . . .	26
Aufgaben . . . . .	31
<b>2 Axiomatik der euklidischen Geometrie</b>	<b>35</b>
2.1 Die Bedeutung von Euklids Axiomatik . . . . .	35
Anhang. Die „natürliche Geometrie“ von Hjelmslev . . . . .	41
2.2 Das Parallelenaxiom . . . . .	43
Anhang. Der Beweis des Parallelenaxioms nach Lorenzen . . . . .	55
2.3 Die moderne Sicht der Axiomatik . . . . .	57
Anhang 1. Andere Axiomensysteme für den euklidischen Raum . . . . .	68
Anhang 2. Das arithmetische Modell . . . . .	72
Aufgaben . . . . .	74
<b>3 Grundlagen der projektiven Geometrie</b>	<b>77</b>
3.1 Das Einbeziehen des Unendlichen in die Geometrie . . . . .	77
3.2 Axiomatik der projektiven Geometrie . . . . .	85
3.2.1 Der projektive Raum . . . . .	85
A) Inzidenzaxiome . . . . .	85
Anhang. Die Gültigkeit der Aussagen $1^d$ bis $9^d$ . . . . .	95
B) Die weiteren Axiome . . . . .	97
3.2.2 Die projektive Ebene . . . . .	109
A) Axiomatik . . . . .	109
B) Koordinaten . . . . .	119
3.3 Projektivitäten . . . . .	139
3.3.1 Eindimensionale Projektivitäten . . . . .	140
A) Involutionen . . . . .	150
3.3.2 Zweidimensionale Projektivitäten . . . . .	153
A) Kollineationen . . . . .	155
B) Korrelationen . . . . .	159
Anhang 1. Das arithmetische Modell für $\mathbb{P}_2$ . . . . .	161

Anhang 2. Projektive Dreiecke . . . . .	165
Aufgaben . . . . .	167
<b>4 Kurven 2. Grades . . . . .</b>	<b>171</b>
4.1 Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse . . . . .	171
4.2 Pol und Polare . . . . .	181
4.3 Analytische Beschreibungen . . . . .	184
4.4 Kurven 2. Grades . . . . .	189
Anhang. Kurven $n$ -ter Ordnung bzw. Klasse mit $n \geq 2$ . . . . .	195
4.5 Imaginärtheorie . . . . .	200
4.5.1 Der algebraische Zugang . . . . .	201
4.5.2 Der geometrische Zugang . . . . .	203
4.5.3 Die Pfeildarstellung komplexer Punkte . . . . .	213
Anhang 1. Wegkurven . . . . .	226
Anhang 2. Zur außermathematischen Bedeutung der projektiven Geometrie . . . . .	234
Aufgaben . . . . .	241
<b>5 Ableitung spezieller Geometrien . . . . .</b>	<b>245</b>
5.1 Die euklidische Geometrie . . . . .	245
5.2 Allgemeine Beschreibung der Cayley–Klein–Geometrien . . . . .	250
5.3 Distanz- und Winkelmessung . . . . .	255
5.3.1 Allgemeine Betrachtungen . . . . .	255
5.3.2 Formeln für Distanz und Winkel . . . . .	267
Anhang. Komplexe Zahlen als Koordinaten . . . . .	273
Aufgaben . . . . .	275
<b>6 Ebene Cayley–Klein–Geometrien . . . . .</b>	<b>277</b>
6.1 Hyperbolische Geometrie . . . . .	277
6.1.1 Gültigkeit der Axiome . . . . .	277
6.1.2 Modelle . . . . .	283
6.1.3 Distanz- und Winkelmessung . . . . .	288
6.1.4 Ausgewählte Ergebnisse . . . . .	296
6.1.5 Der Sehraum . . . . .	300
6.2 Elliptische Geometrie . . . . .	303
6.2.1 Modelle . . . . .	303
6.2.2 Distanz- und Winkelmessung . . . . .	307
6.3 Pseudoeuklidische Geometrie . . . . .	310
6.3.1 Grundlagen . . . . .	310
6.3.2 Elementare Resultate . . . . .	314
A) Bewegungen . . . . .	314
B) Distanz und Winkel . . . . .	315
C) Dreiecke . . . . .	321
6.3.3 Pseudoeuklidische Geometrie und Relativitätstheorie . . . . .	323

6.3.4	Das Hyperboloidmodell der hyperbolischen Ebene . . . . .	330
6.3.5	Pseudokomplexe Zahlen als Koordinaten . . . . .	333
6.4	Doppelt-hyperbolische Geometrie . . . . .	334
6.4.1	Grundlagen . . . . .	334
6.4.2	Das Hyperboloidmodell der doppelt-hyperbolischen Ebene . . . . .	339
6.5	Dualhyperbolische Geometrie . . . . .	341
6.6	Galileigeometrie . . . . .	344
6.6.1	Allgemeines . . . . .	344
6.6.2	Distanz, Winkel und Bewegungen . . . . .	347
6.6.3	Duale Zahlen als Koordinaten . . . . .	349
6.7	Duale Geometrien . . . . .	350
6.7.1	Dualhyperbolische Geometrie . . . . .	353
6.7.2	Duale pseudoeuklidische Geometrie . . . . .	354
6.7.3	Dualeuklidische Geometrie . . . . .	360
	Anhang. Zur Bedeutung der dualeuklidischen Geometrie . . . . .	365
6.8	Koordinatisierung der Cayley–Klein-Ebenen . . . . .	368
6.9	Ausblick. Räumliche Cayley–Klein-Geometrien . . . . .	375
	Aufgaben . . . . .	388
	<b>Anmerkungen</b>	<b>393</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>405</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>415</b>