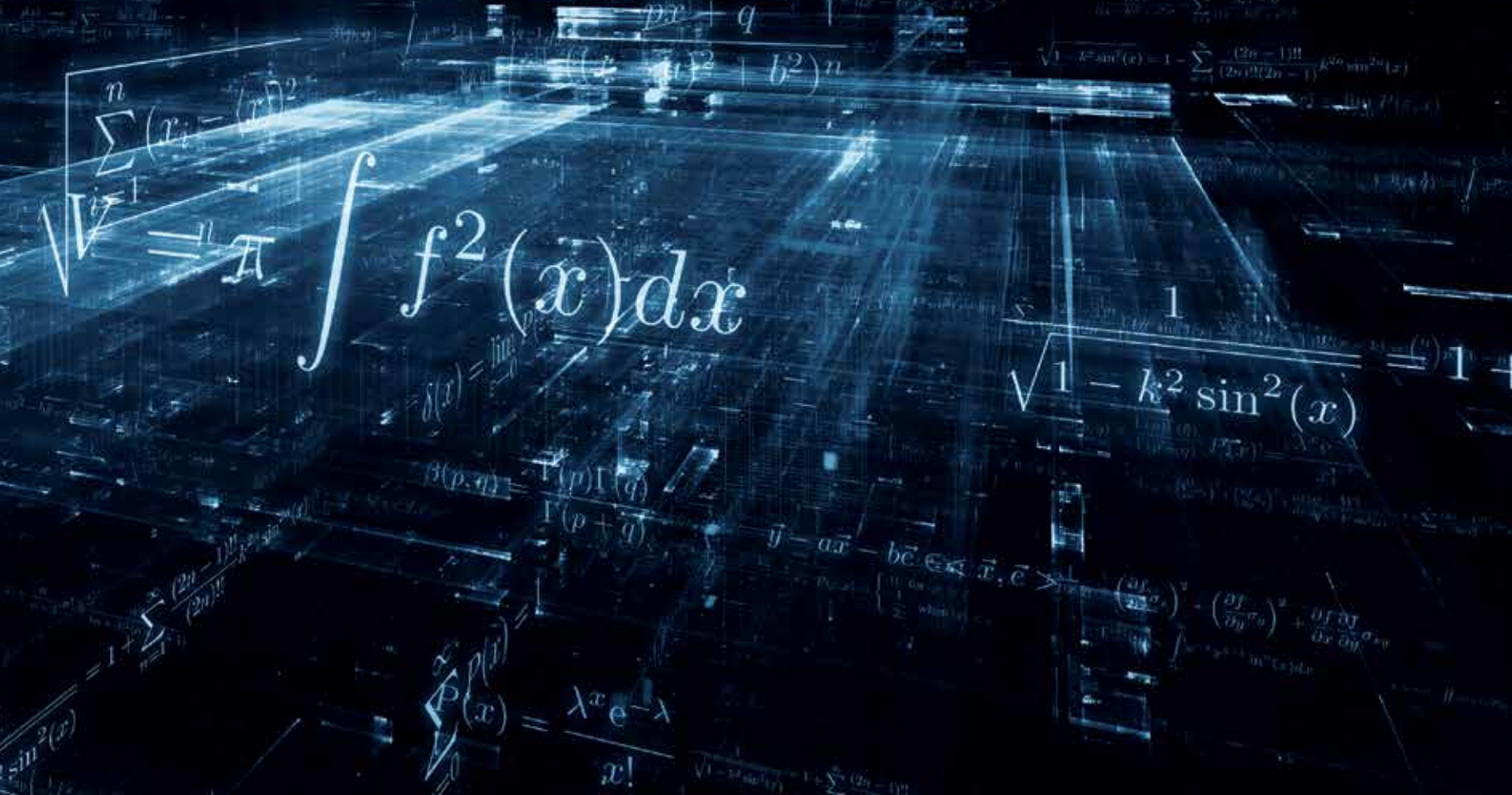




Mathematik

DIE FASZINIERENDE WELT DER ZAHLEN

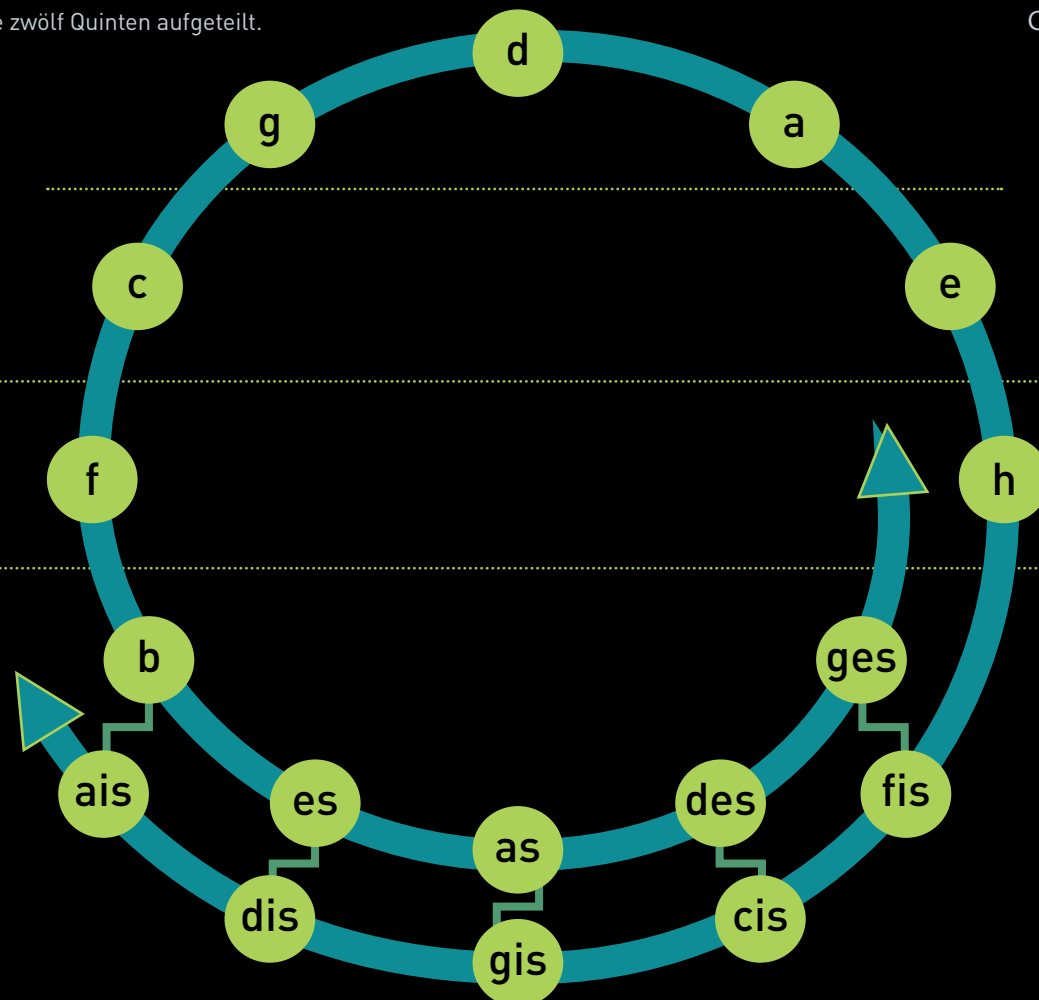




Experimentiermuseum
Phaeno in Wolfsburg: Eine
Versuchsanordnung de-
monstriert mithilfe einer
roten Flüssigkeit den **Satz
des Pythagoras**.

Bewegungsbahnen der Gestirne zu beschreiben. Übrigens hat schon Aristarch von Samos (um 310– um 230 v. Chr.) gelehrt, dass sich die Erde um die Sonne bewegt. Das pythagoreische Weltmodell sieht ein Urfeuer in der Mitte des Systems vor.

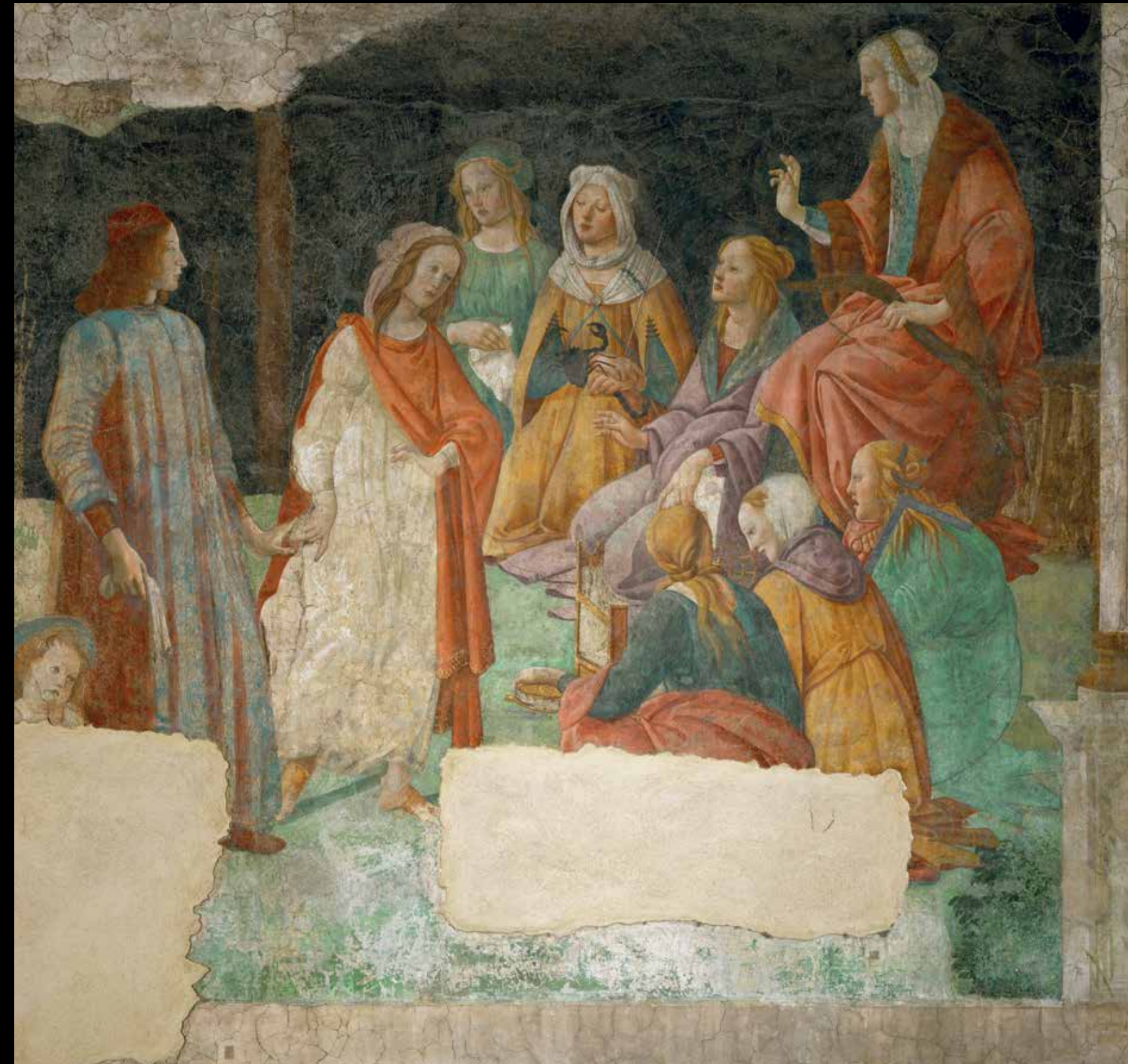
Quintenzirkel. Nach zwölf Quinten, zum Beispiel von b aus, landet man knapp neben b, nämlich bei ais. Der Unterschied ist das pythagoreische Komma. In der temperierten Stimmung wird der Unterschied auf die zwölf Quinten aufgeteilt.



Die Musik war eine der Gründungsdisziplinen der pythagoreischen Wissenschaften. Dabei ging es, ausgehend von den Akkorden, um die Konstruktion einer Tonleiter.

Wie viel Mathematik darin steckt, spürt man schon, wenn man sich mit dem Quintenzirkel (Abb. unten) befasst. In der Musiktheorie erinnert das pythagoreische Komma nämlich noch heute an die Pythagoreer. Reiht man sieben Oktaven aneinander, dann kommt man fast beim selben Ton an, wie wenn man zwölf Quinten hintereinander hängt, aber eben nur fast. Der kleine Unterschied ist das pythagoreische Komma. Der Fehler wird heute in der chromatischen Stimmung auf die zwölf Quinten aufgeteilt. Ergänzt wurde das altgriechische Wissenssystem durch das Trivium (drei Wege), das Grammatik, Logik und Rhetorik umfasst. Trivium und Quadrivium zusammen bilden die sieben freien Künste. Unter diesem Ettiket präsentierten sich die sieben Disziplinen aber erst in Spätantike und frühem Mittelalter in den Domschulen.

Gegenüber den praktischen Künsten waren **die sieben freien Künste** – Botticellis Fresko rechts zeigt einen Jüngling, der in sie eingeführt wird (um 1480) – den freien Männern vorbehalten, die also nicht zum Broterwerb arbeiten mussten.



Konstruierte Perspektive

Die Anwendung der Zentralperspektive durch die Künstler der italienischen Renaissance und deren theoretische Analyse stellten die Weichen für die Entwicklung der „darstellenden Geometrie“.

Der italienische Maler **Giotto di Bondone** leistete im 13./14. Jh. wichtige Vorarbeiten für die Einführung der Perspektive in die Kunst – wie auf diesem Fresko in der **Basilika San Francesco** in Assisi sichtbar.

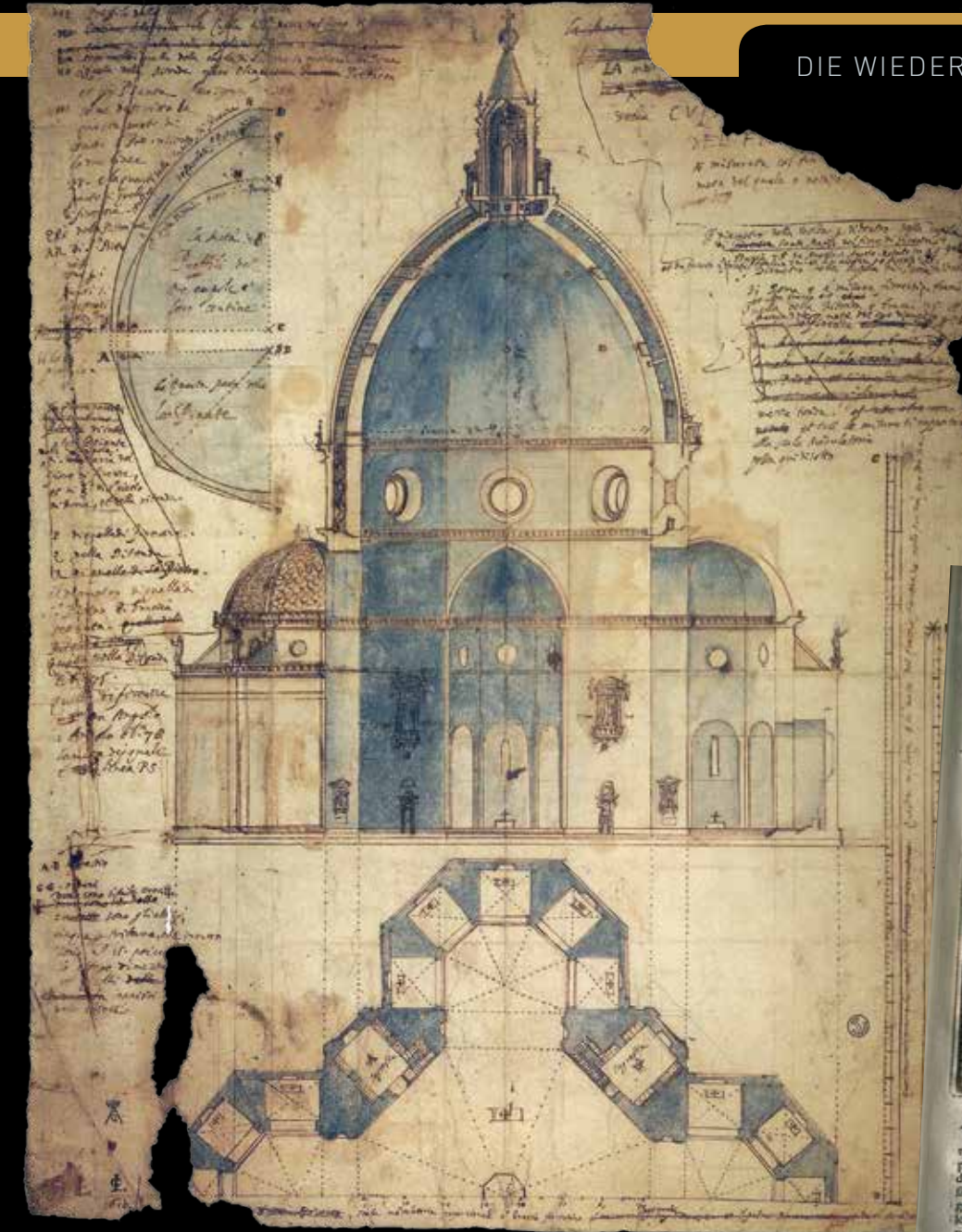


Im Mittelalter war die (Tafel-)Malerei flächig, sie kam ohne Eindrücke von der Tiefe des Raumes aus. Im 14. Jahrhundert versuchte Giotto erstmals, einen Raumeindruck zu erzeugen, indem er den üblichen Goldhintergrund durch blauen Himmel, Berge und Felsen ersetzte. Er arrangierte nicht mehr die Welt der Symbole im Bild,

sondern versuchte einen natürlichen Welt-eindruck zu vermitteln. Da stellte sich die Frage, wie der dreidimensionale Raum im ebenen Bild darzustellen war. Die Schwierigkeit der ebenen Raumdarstellung ist schon bei der Kartografie des Ptolemäus erwähnt worden. Empirische Darstellungen mit Perspektive gab es schon in der Antike, z. B. in den Wandgemälden in Herculanum. Auch Giotto war noch auf dem Weg zum Fluchtpunkt, er zeichnete die perspektivische Verzerrung nach Gefühl.

Zentralperspektive

Die konstruierte Perspektive führte erst Anfang des 15. Jahrhunderts **Filippo Brunelleschi** ein. Sein System der Perspektive demonstrierte er eindrucksvoll vor dem Dom in Florenz. Auf einer kleinen Tafel hatte er eine Ansicht vom Domplatz konstruiert, in die Tafel hatte er ein Loch gebohrt. Von der Rückseite schaute man durch das Loch auf den Dom. Hielt man nun einen Spiegel zwischen Dom und Bildtafel,

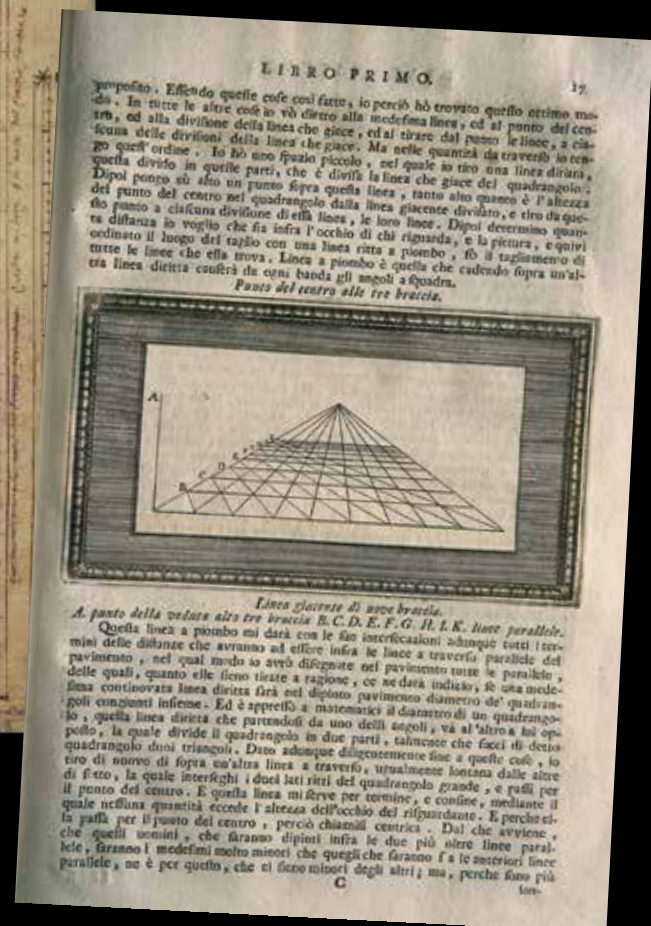


Als Baumeister ist **Filippo Brunelleschi** u.a. für die Kuppel von Santa Maria del Fiore in Florenz bekannt (zeitgenössische Zeichnung).

dann konnte man Bild und Wirklichkeit vergleichen – ein verblüffendes Erlebnis für die Zeitgenossen. Brunelleschi erklärte seinen Freunden seine Methode. **Leon Battista Alberti** stellte die Theorie 1436 in seiner Schrift „Della pittura“ ausführlich dar.

Brunelleschi hatte durch seine Demonstration nahegelegt, dass seine Konstruktion genau das macht, was das Auge tut. Das ist aber nicht so – vor allem, weil wir zwei Augen haben, zudem ist unsere Netzhaut keine ebene Fläche, sondern eine Halbku-

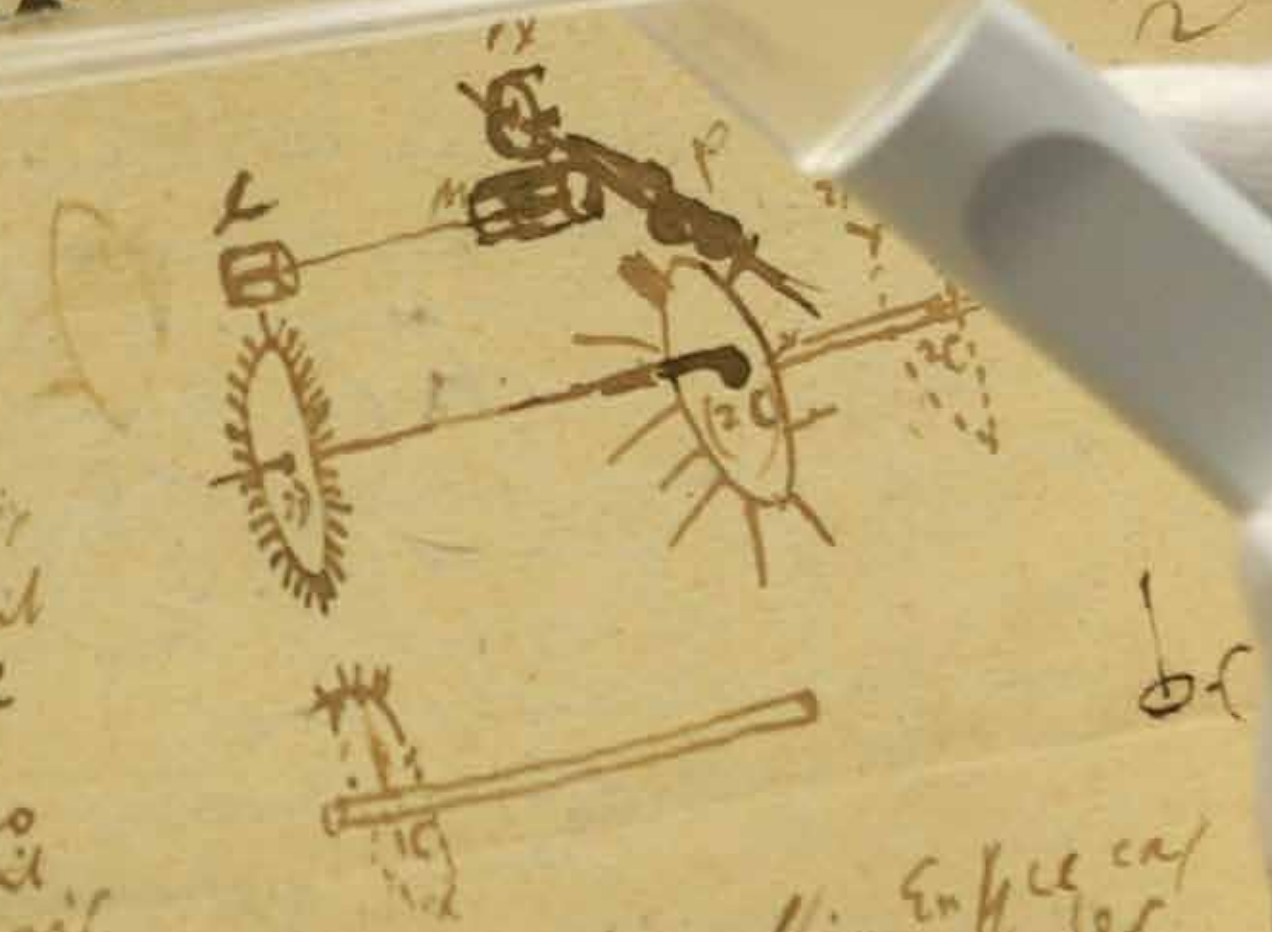
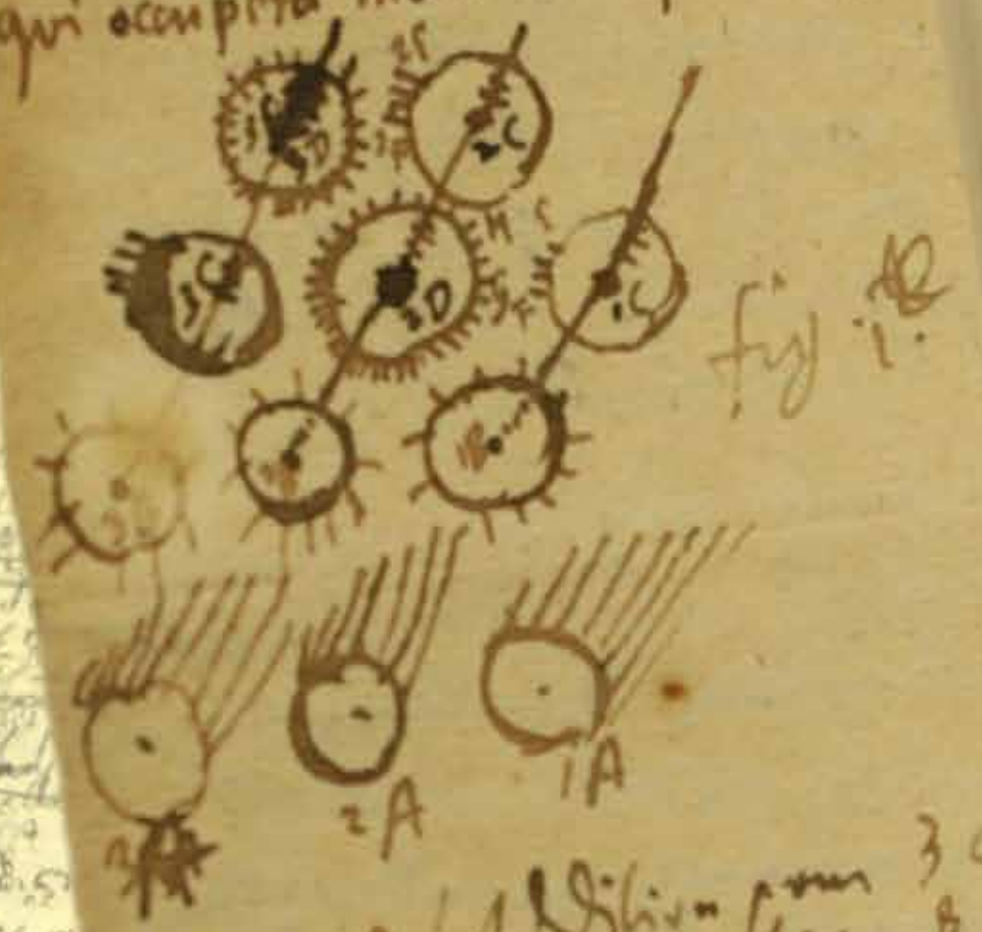
Perspektivische Studie aus **Leon Battista Albertis** (1404 – 72) Werk „Della Pittura“ in einer spanischen Ausgabe von 1733.



8 mai 1682

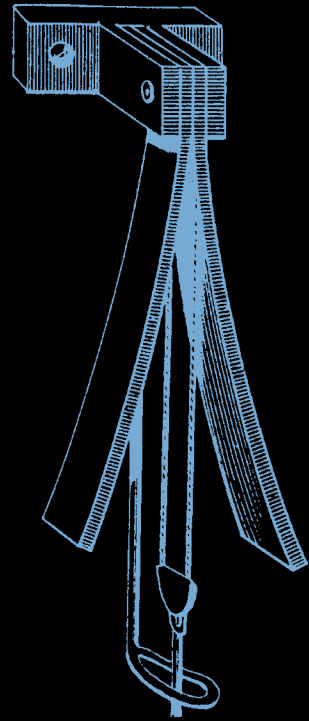
Machine d'Arithmetique

Je croy d'avoir enfin une maniere achevée saine et simple qui occupera moins de place que



Machine d'Addition pour 3 chiffres.
 A roue à dent inégale B roue
 d'addition C la partie inférieure
 d'une roue à dent inégale A roue à dent
 égale B roue à dent inégale C roue à dent
 égale D roue à dent inégale E roue à dent
 égale F roue à dent inégale G roue à dent
 égale H roue à dent inégale I roue à dent
 égale K roue à dent inégale L roue à dent
 égale M roue à dent inégale N roue à dent
 égale O roue à dent inégale P roue à dent
 égale Q roue à dent inégale R roue à dent
 égale S roue à dent inégale T roue à dent
 égale U roue à dent inégale V roue à dent
 égale W roue à dent inégale X roue à dent
 égale Y roue à dent inégale Z roue à dent
 égale

Unter der Lupe erkennt man Details von Leibniz' Aufzeichnungen (Faksimile in der Leibniz Bibliothek Hannover) zu seiner Rechenmaschine. Seine Motivation erläuterte Leibniz so: „Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil mit dem Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann.“



Die **Zykloidenbacken** sorgen dafür, dass die Pendelmasse auf einer Zykloiden geführt wird.

„Horologium oscillatorium“ (Die Pendeluhr) entwickelte: die **Theorie der Evoluten und Evolventen**.

Die Schiffsuhr

Huygens konstruierte auch eine Version als Schiffsuhr. In einem zweiten Teil weist er nach, dass eine Masse, die sich auf einer Zykloiden bewegt, von jedem Punkt aus eine gleich lange Zeit zum tiefsten Punkt benötigt. Damit eignet sich die Zykloide für eine Pendelschwingung. Im dritten Teil entwickelt er ein neues mathematisches Gebiet, die Theorie der Evoluten und Evolventen.

Dabei geht es um Kurven, die bei Abwicklungen entstehen. Legt man um einen Zylinder einen Faden mit einem Zeichenstift am Ende und wickelt dann den Faden straff



Christiaan Huygens und der Uhrmacher **Salomon Coster** mit ihrer ersten **Pendeluhr** (Gemälde, 20. Jh. von Hugh Chevins). Huygens hatte Coster beauftragt, ein Uhrwerk mit einem Pendel als Gangregler zu bauen.

gespannt ab, so zeichnet der Stift eine Kreisevolvente (Abb. unten links). Eine solche Abwicklung, Evolvente, kann man von jeder Kurve, der Evolute, erzeugen. Bei der Zykloide ist erstaunlicherweise die Evolvente wieder eine Zykloide (Abb. unten rechts).

Die Schiffsversion der Uhr war nicht etwa eine Spielerei, sondern der eigentliche Motor der Uhrenentwicklung. Die Schifffahrt hatte damals ein großes Navigations-

problem. Die geografische Breite konnte leicht bestimmt werden, auf der Nordhalbkugel beispielsweise durch die Position des Polarsterns. Die Bestimmung der geografischen Länge war dagegen weitaus komplizierter. Am einfachsten wäre es gewesen, die Uhrzeit des Abfahrtshafens mitzunehmen und unterwegs um 12 Uhr mittags Ortszeit, beim Höchststand der Sonne auf der Schiffsuhr nachzusehen, wie viel Uhr es am Abfahrtshafen ist. Beträgt der Zeitunterschied beispielsweise sechs Stunden, dann ist das Schiff eine Viertelerumdrehung vom Ausgangshafen entfernt. Die Huygens'sche Pendeluhr eignete sich dafür allerdings nicht. Es wurden überhaupt nur wenige Exemplare gebaut. Die technischen Schwierigkeiten waren zu groß. Bei der Entwicklung der Präzisions-Pendeluhr im 19. Jahrhundert beschritt man einen anderen Weg: Man sorgte mit allerhand Kniffen



für eine konstant kleine Auslenkung des Pendels. Für die Bestimmung der geografischen Länge war bis ins 20. Jahrhundert hinein das Mond-Distanz-Verfahren von Tobias Mayer eine kostengünstige Alternative zu einer teuren Schiffsuhr.

Bleibende praktische Bedeutung hat die Evolvente beim Bau von Zahnrädern. Kein geringerer als Leonhard Euler hatte sie im Jahr 1760 zur Verzahnung vorgeschlagen.

Bei der **Evolventenverzahnung** von Zahnrädern werden die Kräfte optimal übertragen und der Verschleiß ist gering.

