Unverkäufliche Leseprobe aus:

Gerald Kuba, Stefan Götz
Zahlen

ZAHLEN

GRUNDRISS

VERTIEFUNGEN

ANHANG

1 DIE ATOME DER ZAHLEN

1.1 Eine intragalaktische Grußbotschaft

Der Astronom Carl Sagan, Autor des populärwissenschaftlichen Weltbestsellers *Unser Kosmos* und Moderator der gleichnamigen, in den frühen Achtzigerjahren sehr beliebten Fernsehserie, veröffentlichte wenige Jahre vor seinem Tod den utopischen Roman *Contact*, der (mit Jodie Foster in der Hauptrolle) auch verfilmt wurde. Kernthema des Romans sind die Existenz einer außerirdischen Intelligenz und die Möglichkeiten, mit derselben zu kommunizieren. Da zur Entstehungszeit des Romans gerade das erste außerhalb unseres Sonnensystems gelegene Planetensystem entdeckt wurde, nämlich das des 26 Lichtjahre von der Erde entfernten Sterns Wega, siedelt Sagan die intelligente Spezies, die mit der Menschheit Kontakt aufnimmt, auch genau dort an. Ist eine Kommunikation zwischen der Erde und einem Planeten der Wega aus linguistischen Gründen ohnehin bereits sehr mühsam, kann eine solche aufgrund des langen Übertragungsweges auch nur sehr bescheiden sein. Praktisch verbleibt (in einem durchschnittlichen Menschenleben) nur die Möglichkeit einer einzigen Kontaktaufnahme.

Wenn eine intelligente Spezies Radiowellen ins All senden will, um auf ihre Existenz aufmerksam zu machen, muss sie darauf achten, dass der potentielle Empfänger möglichst gute Chancen hat, die Radiobotschaft überhaupt zu bemerken. Ein umfassendes Verständnis derselben ist zwar wünschenswert, aber sekundär, denn bereits mit dem wahrgenommenen Empfang des Signals wird auf jeden Fall die Kernbotschaft verstanden, die etwa lauten mag: »Schaut euch unser Signal genau an und erkennt, dass ihr nicht alleine im Weltall seid.«

Die kosmische Botschaft soll also möglichst einfach sein, jedenfalls so einfach wie möglich beginnen, muss aber auch eine Struktur besitzen, die erkennbar anders ist als eine der ohnehin ständig auf der Erde eintreffenden Radiowellen, die kosmisch-natürlichen Ursprungs sind (Quasare, Pulsare, Radiogalaxien). Naheliegenderweise werden zu Beginn der Botschaft Zahlen gesendet, da die Zahlen als der einfachste Teil einer wahrhaftig universellen Sprache anzusehen sind. Nun könnte man z. B. die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 usw. in einfachsten Pulsen (ein Puls, Pause, zwei Pulse, Pause, drei Pulse, Pause usw.) senden. Diese Folge ist aber wenig originell und einer außerirdischen Intelligenz (und Sagans) nicht würdig. Im Roman wird daher eine andere Zahlenreihe zur ersten Kontaktaufnahme gewählt, nämlich

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, ...

Diese Reihe mag auf den ersten Blick als Reihe von Zufallszahlen erscheinen und somit noch ungeeigneter für eine kosmische Botschaft sein als die Reihe der natürlichen Zahlen. Bei näherer Betrachtung (und mit der dazu erforderlichen mathematischen Vorbildung) erkennt man allerdings, dass Signale aus dem Weltall, die diese Zahlenreihe bilden, mit absoluter Sicherheit von einer außerirdischen Intelligenz verursacht wurden, stellt sie doch in lückenloser Reihenfolge die Primzahlen dar:

Eine natürliche Zahl p größer als 1 heißt Primzahl, wenn es keine natürlichen Zahlen m und n gibt, die beide größer als 1 sind, sodass $p = m \cdot n$ gilt. Die Primzahlen sind somit unteilbar, sodass man sie im wahrsten Sinne des Wortes als Atome bezeichnen kann. (Obwohl die Zahl 1 zweifellos auch unteilbar ist, rechnet man sie aus guten Gründen nicht zu den Primzahlen.)

Die Primzahlen spielen in der Mathematik eine dermaßen fundamentale Rolle, dass sie jeder intelligenten Spezies vertraut sein müssen, die Radiosignale empfangen kann, weil jedem technischen Knowhow zwangsläufig ein mathematisches vorangeht. Überdies weiß man, dass die Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge in gewisser Weise nicht maschinell produzierbar, jedenfalls nicht ohne Intelligenz produzierbar sind, sodass die Primzahlenreihe geradezu eine ideale intragalaktische Grußbotschaft darstellt.

1.2 Eine einfache Frage

Dass die Zahlen zentrale Objekte der Mathematik darstellen, wird niemand bestreiten, ausgenommen manche Mathematiker, die im polemischen Überschwang dem Laien kundtun wollen, Mathematik habe mit Rechnen eigentlich gar nichts zu tun. Mathematik zu betreiben vermag eben nur der kreative Mensch, irgendetwas irgendwie ausrechnen kann jeder Computer, diese modernste Version einer Rechenmaschine. Als ein Hauptziel des Buches kann die möglichst umfassende und fundierte Beantwortung der Frage

Was ist die Quadratwurzel aus zwei?

angesehen werden. Tatsächlich ist diese Frage ungleich schwieriger zu beantworten als die analoge Frage nach der berühmten, lange Zeit geheimnisumwitterten Quadratwurzel aus minus eins, auf die wir nicht eingehen werden. Auch wenn man in der Schule erfährt, dass $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$ gilt, hat man damit eigentlich nichts gelernt. Was bedeuten die Punkte »...« nach der 3? Wenn nach der 3 noch weitere Ziffern kommen, was durch »...« wohl symbolisiert werden soll, wie viele und welche? Wenn man lernt, dass $\sqrt{2}$ ein »unendlicher Dezimalbruch« ist, was soll das eigentlich heißen? Wie soll man mit einer Zahl rechnen, die man gar nicht aufschreiben kann, weil man mit dem Aufschreiben nie fertig wird? Wie kann es sein, dass das Quadrat eines solchen Ungetüms ein so braves und anschauliches Ding wie die Zahl 2 ist? Wenn 1.414213... aber nur ein Näherungswert der Länge der Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge 1 ist, was ist dann ein Näherungswert und vor allem, was ist überhaupt die Länge einer Strecke? Glauben wir – wenn überhaupt – nur deshalb zu wissen, was $\sqrt{2}$ ist, weil wir längst vergessen haben, dass wir es nie wirklich verstanden haben?

1.3 Der Hauptsatz der Zahlentheorie

Dass man ein ganzes Buch schreiben muss, um das Wesen von $\sqrt{2}$ zu erfassen, ist im »atomaren Aufbau« des Zahlbereichs begründet. Wenn wir noch ein wenig in der Analogie Atome – Primzahlen verharren, so beschreibt der Hauptsatz der Zahlentheorie diesen »atomaren Aufbau«: Jede natürliche Zahl, die größer als 1 und selbst keine Primzahl ist, kann (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen dargestellt werden.

So gilt z.B. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ und es lässt sich die Zahl 60 (abgesehen von Umordnungen des zweimal auftretenden Faktors 2 und der jeweils einmal auftretenden Faktoren 3 und 5) nicht anders als Produkt von Primzahlen darstellen. Zur vereinfachenden Sprechweise sieht man eine Primzahl p auch als Produkt von Primzahlen: Dieses Produkt hat nur einen einzigen Faktor, nämlich p selbst. Dann kann man den Hauptsatz der Zahlentheorie kurz und bündig formulieren:

> Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, kann (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen dargestellt werden.

Hier erkennen wir auch nebenbei, warum man die Zahl 1 nicht zu den Primzahlen rechnet. Würde man das tun, dann wäre der Hauptsatz in der obigen Formulierung falsch. Man hätte dann z.B. die verschiedenen Darstellungen $60 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $60 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $60 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ usw. Es ist einfach unpraktisch, die Zahl 1 zu den Primzahlen zu rechnen, da man dann nicht kurz von den Primzahlen, sondern andauernd und umständlich von den von 1 verschiedenen Primzahlen sprechen müsste.

Der Hauptsatz der Zahlentheorie ist von eminenter Bedeutung für die Mathematik. Wir werden einen **Beweis des Hauptsatzes** in den Vertiefungen nachreichen, an dieser Stelle aber bereits mit einem kleinen gedanklichen Ausflug demonstrieren, dass der Lehrsatz alles andere als selbstverständlich ist, ja geradezu den Charakter eines Wunders hat. S. 108 Wir lassen alle ungeraden Zahlen beiseite und betrachten statt der natürlichen Zahlenreihe die Reihe 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, ... der geraden Zahlen. Da sowohl die Summe als auch das Produkt zweier gerader Zahlen wieder gerade ist, kann man im Bereich der geraden Zahlen genauso rechnen wie im Bereich der natürlichen Zahlen, sodass die beiden Zahlenbereiche vom strukturellen Standpunkt aus kaum zu unterscheiden sind. Gibt es »Primzahlen« im Bereich der geraden Zahlen? Selbstverständlich! Wir brauchen ja nur die alte Definition zu übernehmen und den neuen Gegebenheiten anzupassen: Eine gerade Zahl z nennen wir eine G-Primzahl, wenn es keine geraden Zahlen m und n gibt, sodass $z = m \cdot n$ gilt. Die Reihe der G-Primzahlen lautet dann folgendermaßen: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, ... Denn offensichtlich ist eine G-Primzahl einfach das Doppelte einer ungeraden Zahl. und umgekehrt. Wie schaut es nun mit der Zerlegbarkeit gerader Zahlen in G-Primzahlen aus? Sind die G-Primzahlen die »Atome« in der neuen Welt der geraden Zahlen? Die Antwort lautet Ja und Nein! Tatsächlich kann man eine gerade Zahl, die keine G-Primzahl ist, stets als Produkt von G-Primzahlen schreiben. Im Gegensatz zu früher ist diese Darstellung aber selten eindeutig: Wegen $60 = 2 \cdot 30$ und $60 = 6 \cdot 10$ besitzt z.B. die Zahl 60 zwei völlig verschiedene Zerlegungen: die eine mit den G-Primzahlen 2 und 30, die andere mit den G-Primzahlen 6 und 10. Dieses Beispiel ist typisch, denn offensichtlich besitzt eine gerade Zahl, die das Vierfache des Produkts zweier von 1 verschiedener ungerader Zahlen ist, immer mindestens zwei verschiedene Zerlegungen in G-Primzahlen.

1.4 Unendlichkeit der Primzahlen

Nun wieder zurück zu den eigentlichen Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 usw. Wir stellen eine naheliegende Frage: Gibt es unendlich viele Primzahlen? Ist es ausgeschlossen, dass vielleicht ab einer unvorstellbar großen Zahl wie $10^{100000000}$ überhaupt keine Primzahlen in der natürlichen Zahlenreihe mehr auftreten, bis in alle Ewigkeit nicht? Kann man so eine Frage, in der der höchst faszinierende und höchst problematische Begriff des Unendlichen geradezu unverblümt (um nicht zu sagen unverschämt) auftritt, überhaupt definitiv beantworten?

Nun, auch wenn manch einer glaubt, das Unendliche gehöre in die Philosophie (oder in die Theologie), vertreten wir doch die Meinung, dass es nirgends besser aufgehoben ist als in der Mathematik. »Will man ein kurzes Schlagwort, das den lebendigen Mittelpunkt der Mathematik trifft, so darf man wohl sagen: Sie ist die Wissenschaft vom Unendlichen« (H. Weyl).

Tatsächlich kennt man gleich mehrere Beweise dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Der erste und bekannteste Beweis stammt von Euklid, einem der berühmtesten Mathematiker des griechischen Altertums (um 300 v. Chr.). Wir geben im Folgenden einen Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen, der sich eng an Euklids Beweis anlehnt, denselben allerdings ein wenig vereinfacht.

Zunächst stellen wir fest, dass die Aussage *Es gibt unendlich viele Primzahlen* gleichbedeutend ist mit der Aussage *Wenn immer p irgendeine Primzahl ist, dann gibt es sicher eine Primzahl, die größer als p ist.*

Bevor wir diese Aussage allgemein beweisen, wollen wir die zentrale Beweisidee exemplarisch ausführen. Wir nehmen z.B. die Primzahl 19 und zeigen, dass es eine Primzahl größer als 19 gibt: Wir berechnen dazu die Zahl $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1 = 9699691$ und stellen fest: Die Zahl 9699691 ist durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 (das sind alle Primzahlen bis 19) teilbar. Man kann das natürlich durch Nachrechnen überprüfen. Das ist aber auch unmittelbar klar, weil bei der Division von 9699691 durch eine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 automatisch der Rest 1 bleiben muss. Die Zahl 9699691 muss andererseits – so wie jede natürliche Zahl größer als 1 – durch mindestens eine Primzahl teilbar sein. Tatsächlich gilt $9699691 = 347 \cdot 27953$ und 347 ist eine Primzahl. Die Zahl 9699691 ist also durch die Primzahl 347 teilbar. Offensichtlich ist 347 verschieden von 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Das kann man auch scheinbar umständlich so begründen: 347 ist verschieden von 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, weil 347 ein Teiler von 9699691 ist, die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 aber keine Teiler von 9699691 sind. Jedenfalls haben wir so in 347 eine Primzahl gefunden, die größer als 19 ist.

Der Beweis, dass es zu jeder Primzahl p sicher eine Primzahl gibt, die größer als p ist, besteht nun darin, das Zahlenbeispiel $p = 19$ zu abstrahieren, d.h. so zu verallgemeinern, dass 19 den Charakter einer »Hausnummer« bekommt, für die man genauso gut jede andere Primzahl nehmen könnte.

Es sei also p irgendeine Primzahl. Wir denken uns alle Primzahlen bis p angeschrieben und konstruieren die Zahl a als das um 1 vergrößerte Produkt dieser Zahlen. Im Falle $p = 2$ ist $a = 2 + 1 = 3$, im Falle $p = 3$ ist $a = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, im Falle $p = 5$ ist $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$, usw. Ist p größer als 5, so können wir suggestiv $a = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p) + 1$ schreiben. Wir betrachten nun die Zahl a und stellen fest: Die Zahl a ist durch keine Primzahl, die kleiner oder gleich p ist, teilbar. Denn so wie die Zahl a konstruiert ist, muss bei Division durch eine der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots, p$ automatisch der Rest 1 bleiben. Als natürliche Zahl, die größer als 1 ist, muss die Zahl a aber durch irgendeine Primzahl teilbar sein. Es gibt also sicher eine Primzahl q, die ein Teiler von a ist. Wenn a selbst eine Primzahl ist (wie im Falle $p = 2$ oder $p = 3$ oder $p = 5$), so muss man $q = a$ nehmen, andernfalls ist q kleiner als a (wie im Falle $p = 19$, wo wir $q = 347$ gefunden haben). Da die Zahl a aber durch keine Primzahl, die kleiner oder gleich p ist, teilbar ist, muss diese Primzahl q größer als p sein. Wir haben somit genau das gezeigt, was wir wollten, nämlich dass es zu jeder Primzahl p sicher eine Primzahl q gibt, die größer als p ist. Es gibt also tatsächlich unendlich viele Primzahlen.

1.5 Verteilung der Primzahlen

Was lässt sich über die Verteilung der Primzahlen sagen, die zwar keine zufällige ist, aber doch einen ziemlich chaotischen Eindruck macht? Mit Ausnahme der 2 sind alle Primzahlen naturgemäß ungerade Zahlen. Unter den ungeraden Zahlen gibt es unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen, die Primzahlen sind, z.B. 3 und 5, 5 und 7, 11 und 13, 101 und 103. Ein in diesem Zusammenhang Jahrtausende altes und noch immer ungelöstes Problem ist, ob es unendlich viele solcher Primzahlzwillinge gibt. Bei drei unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen muss eine der Zahlen zwangsläufig durch 3 teilbar sein, sodass die Zahlen 3,5,7 die einzigen Primzahlendrillinge darstellen. Trotzdem können die Primzahlen zeitweilig relativ dicht gepackt auftreten, wie z.B. 97, 101, 103, 107, 109, 113, aber auch große Lücken aufweisen, z.B. gibt es zwischen 113 und 127 keine Primzahl. Beeindruckender: unter den 804 aufeinander folgenden Zahlen 90874329412298 bis 90874329413101 befindet sich keine einzige Primzahl! Ja die Lücken können sogar beliebig groß sein: Man kann zehntausend unmittelbar aufeinander folgende Zahlen angeben, unter denen keine einzige Primzahl auftritt. Auch eine Million, eine Milliarde, beliebig viele solcher Zahlen! Zehntausend unmittelbar aufeinander folgende Zahlen, die alle keine Primzahlen sind, kann man z.B. folgendermaßen angeben: Es sei z das Produkt aller Zahlen von 1 bis 10001: $z = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 9999 \cdot 10\,000 \cdot 10\,001$. (Die Zahl z ist zugegebenermaßen etwas groß geraten, sie hat genau 35664 Stellen, sodass eine konkrete Angabe der Zahl z erstens mühsam und zweitens reine Platzverschwendung wäre.) Dann betrachten wir die Sequenz $z+2, z+3, z+4, z+5, \ldots, z+10001$, das sind exakt 10 000 unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen. Da konstruktionsgemäß jede Zahl von 2 bis 10 001 in der Zahl z aufgeht, ist $z+2$ durch 2 teilbar, $z+3$ durch 3 teilbar, $z+4$ durch 4 teilbar, $z+5$ durch 5 teilbar, usw. und schließlich $z+10001$ durch 10 001 teilbar:

$$
\begin{aligned}
z+2 &= 2\cdot((3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 9999\cdot 10000\cdot 10001)+1)\\
z+3 &= 3\cdot((2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 9999\cdot 10000\cdot 10001)+1)\\
z+4 &= 4\cdot((2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 9999\cdot 10000\cdot 10001)+1)\\
z+5 &= 5\cdot((2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 9999\cdot 10000\cdot 10001)+1)\\
&\ldots\\
z+10000 &= 10000\cdot((2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 9999\cdot 10001)+1)\\
z+10001 &= 10001\cdot((2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 9999\cdot 10000)+1)
\end{aligned}
$$

Es kann also keine der Zahlen der angegebenen Sequenz eine Primzahl sein! (Auf analoge Weise kann man auch eine Million, eine Milliarde, beliebig viele unmittelbar aufeinander folgende Zahlen angeben, die alle keine Primzahlen sind.)

Die angegebenen Beispiele suggerieren, dass lange primzahlfreie Sequenzen in den natürlichen Zahlen erst spät, d.h. bei sehr großen Zahlen auftreten. Tatsächlich kann man etwa zeigen, dass es zwischen einer beliebigen Zahl $n>1$ und ihrem Doppelten $2n$ stets mindestens eine Primzahl gibt. (Für kleine Zahlen z.B.: zwischen 2 und 4 liegt die Primzahl 3, zwischen 3 und 6 liegt die Primzahl 5, zwischen 4 und 8 liegen die Primzahlen 5 und 7, zwischen 5 und 10 liegt die Primzahl 7, zwischen 6 und 12 liegen die Primzahlen 7 und 11.) Dagegen ist es ein ungelöstes Problem, ob es zwischen den Quadraten von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen (wie z.B. zwischen $1^2=1$ und $2^2=4$, zwischen $2^2=4$ und $3^2=9$, oder auch zwischen $123^2=15129$ und $124^2=15376$) stets mindestens eine Primzahl gibt.

Nun wollen wir auch noch ein quantitatives Resultat zur Verteilung der Primzahlen angeben. Mit $P(k)$ bezeichnen wir die Anzahl aller Primzahlen, die in der Zahlenfolge $1,2,3,\ldots,k$ auftreten. So ist z.B. $P(8)=4$, weil in der Sequenz $1,2,3,4,5,6,7,8$ genau vier Primzahlen auftreten, nämlich 2, 3, 5 und 7. Es ist $P(15)=6$, weil in der Sequenz $1,2,3,\ldots,15$ genau sechs Primzahlen auftreten, nämlich $2,3,5,7,11$ und 13. Es ist $P(100)=25$, weil es genau 25 Primzahlen zwischen 1 und 100 gibt. Ferner gilt z.B. $P(1000)=168$, $P(1500)=239$ und $P(2000)=303$. Mit Computerunterstützung kann beeindruckend z.B. $P(100\,000\,000)=5\,761\,455$ oder gar $P(10^{16})=279\,238\,341\,033\,925$ bestimmt werden. Naturgemäß wird eine exakte Bestimmung der Werte $P(k)$ für immer größeres k immer schwieriger. Irgendwann erreicht man zwangsläufig Regionen, in denen auch die leistungsfähigsten Computer versagen. Eine exakte Bestimmung etwa von $P(10^{100})$, der Anzahl aller Primzahlen kleiner als 10^{100}, wird technisch kaum je möglich sein, eine exakte Bestimmung von $P(10^{1000})$ ist ziemlich sicher nie möglich. Überdies sind die konkreten Werte von $P(10^{100})$, $P(10^{1000})$ auch völlig uninteressant. Was dagegen hochinteressant ist, ist eine zuverlässige Schätzung der Werte $P(k)$ für beliebig großes k, da selbige die Verteilung der Primzahlen quantifiziert. Mit tiefen Methoden, die völlig aus dem Rahmen des vorliegenden Buches fallen, kann man beweisen, dass

$$\frac{49}{113}\cdot\frac{10^n}{n} < P(10^n) < \frac{51}{101}\cdot\frac{10^n}{n}$$

für alle Zehnerpotenzen 10^n $(n=2,3,4,5,\ldots)$ gilt. Eine Schätzung der Werte $P(10^{100})$ und $P(10^{1000})$ ist dann also (großzügig notiert) durch $P(10^{100})\approx 5\cdot 10^{97}$ und $P(10^{1000})\approx 5\cdot 10^{996}$ gegeben, sodass also rund 0,5 Prozent aller Zahlen zwischen 1 und 10^{100} und rund 0,05 Prozent aller Zahlen zwischen 1 und 10^{1000} Primzahlen sind. Primzahlen sind nach der Schätzung ferner rund 0,005 Prozent der Zahlen zwischen 1 und $10^{10\,000}$, rund 0,0005 Prozent der Zahlen zwischen 1 und $10^{100\,000}$, rund