Unverkäufliche Leseprobe aus:

Frank Linhard
Klassische Mechanik

Klassische Mechanik

Grundriss

Vertiefungen

Anhang

Grundriss

MASSEPUNKTE IN BEWEGUNG

Mechanische Systeme

Die Modelle der Mechanik gründen auf Idealisierungen. Unsere alltägliche Welt, voller Störeffekte und kaum mathematisch elegant modellierbarer Phänomene wird von ihnen nicht eingefangen. Um zu sehen, warum und wieweit die Modelle diesen Phänomenen trotzdem angemessen sind, werden die Störeffekte in Laborsystemen ausgefiltert. Doch ein Laborsystem kann nie am Anfang der Untersuchung stehen. Zuerst müssen die möglichen Störeffekte überhaupt als solche konzeptualisiert werden. Die Galilei'sche Aussage beispielsweise, dass alle Körper unabhängig von ihrer Masse im Schwerefeld gleich schnell fallen, ist ein solches Absehen von »störenden« Gegebenheiten der Alltagswelt. Lässt man einen leichten und einen schweren Körper aus gleicher Höhe fallen, so wird das gewünschte Ergebnis im Allgemeinen nicht erzielt werden: Die fundamentale Aussage über den freien Fall lässt sich somit nicht aus der »Erfahrung« ableiten. Man denke nur an das Standardbeispiel von Feder und Stein, die gleich schnell fallen sollen. Sind Störeffekte aber erst einmal ausgemacht, lassen sich Laborbedingungen ersinnen, die auf experimentelle Evidenzen führen können. Galileis Idee, zwei gleichgroße Stücke aus verschieden schwerem Material anzufertigen, ist ein Verfahren zur Ausfilterung von Störeffekten. Die Erzeugung eines Vakuums, also die Entfernung des Luftwiderstandes, ist ein anderes.

Ein weitgehend störungsfreies System ist das der himmlischen Sphären, also der Fixsterne und Planeten. Entsprechend entwickelt sich auch die Astronomie zur ersten Leitwissenschaft, in der auf Geometrie und Arithmetik basierende Modelle von Anfang an beherrschend sind. Die Forderung nach Sphären und Kreisbahnen, auf denen die Planetenbewegung erfolgen soll, stammt weniger aus der Beobachtung, als vielmehr aus der pythagoräischen Idealvorstellung vom Kreis als optimaler Flächenform und der Sphäre als optimalem Körper. Darüber hinaus erfordern die komplizierten Rückläufigkeiten und Stillstände, die man bei der Planetenbewegung beobachtet, eine Aussage über Rotationen des Gesamtsystems: Beispielsweise die Behauptung, die Erde ruhe in der Mitte des Universums und alle anderen Körper umkreisten sie.

Auch der Gegenstandsbereich der Astronomie ist mechanisch. So war es die große Leistung Newtons, die Systeme der irdischen Mechanik, die Galilei (Fallbewegung) und Huyghens (Pendelbewegung) bereits beschrieben hatten, mit denen der Himmelsmechanik – wie durch Kepler beschrieben – in einem einheitlichen formalen Zugang zu vereinigen. Möglich wurde das durch seinen Kräfteansatz: Die Newton'sche Mechanik setzt die Bewegungsänderung den auf den Körper wirkenden Kräften gleich. Damit kann eine Bewegung genau dann beschrieben werden, wenn alle in einem System wirkenden Kräfte bekannt sind, das heißt angegeben werden können. Die Lösung der Newton'schen Kraftgleichung ist dann die so genannte Bewegungsgleichung. Diese beschreibt die Bewegung von Massen in Raum und Zeit. Von besonderem Interesse sind dabei die Kräfte, die auf jede Masse wirken: Trägheitskraft und Gravitation.

Mathematische Beschreibung

In mechanischen Systemen wird die Wirkung von Kräften auf Objekte betrachtet, die eine bestimmte Masse m besitzen. Häufig werden diese Objekte als Massepunkte beschrieben. Ein Massepunkt ist ein Körper, dessen Ausmaße und Feinstruktur man bei der Beschreibung seiner Bewegung vernachlässigen kann. Man sieht also von Form, Größe und Drehbewegung des Körpers ab und betrachtet nur seine Bewegung im Raum. Ein Planet kann beispielsweise dann, wenn es darum geht, seine Bewegung um die Sonne zu beschreiben, als Massepunkt verstanden werden; will man seine Eigenrotation beschreiben, so genügt das nicht. Das Ziel der Untersuchung mechanischer Systeme ist die Aufstellung der so genannten Bewegungsgleichung. Die Bewegungsgleichung beschreibt die Bewegung des Systems vollständig, das heißt alle Informationen über die Bewegung der Massen sind in ihr enthalten. Im Allgemeinen gewinnt man die Bewegungsgleichung, indem man ein System von Differentialgleichungen löst.

Die Aufstellung der Differentialgleichung erfordert eine vollständige Analyse des mechanischen Systems, die einher geht mit einer mathematischen Beschreibung. Das mechanische System wird konstituiert durch die Körper, die auf diese wirkende Kräfte und die Eigenschaften des Raumes. Die Beschreibung der Lage eines Massepunktes im Raume erfolgt durch seinen Radiusvektor $\boldsymbol{r}$. Der Raum selbst wird durch ein Koordinatensystem beschrieben. In der Newton'schen Mechanik verwendet man meist das für die Euklidische Geometrie geeignete cartesische Koordinatensystem. Wir werden bald sehen, dass es Vorteile bringt, die Systemgeometrie bei der Koordinatenwahl zu berücksichtigen. Im cartesischen Koordinatensystem ist der Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ die gerichtete Größe mit den Komponenten x, y und z, die den Koordinatenursprung (Nullpunkt) mit der Position des Körpers oder Punktes P verbindet.

Im Verlaufe der Bewegung wird P unterschiedliche Orte im Raum einnehmen, so dass eine Bahn des Punktes P entsteht.

Der Punkt P hat also zu jedem Zeitpunkt im Bewegungsverlauf andere Koordinaten, und die Koordinaten x, y und z sind entsprechend Funktionen der Zeit t. Auf diese Weise ist der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ abhängig von der Zeit, also:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Die Bewegungsgleichung ist also diejenige Gleichung, die eine Punkt-

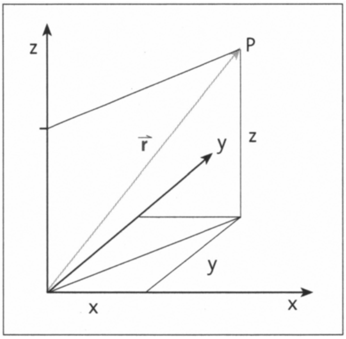

Abbildung 1: Der Radiusvektor ***r*** und seine Komponenten im cartesischen Koordinatensystem

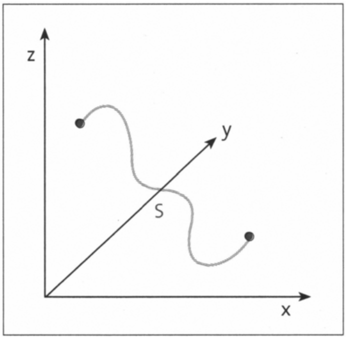

Abbildung 2: Die Bahn (Trajektorie) eines Massepunktes im dreidimensionalen cartesischen Koordinatensystem

position im Koordinaten-Raum in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

Sehen wir uns das konkret an einem Beispiel aus der Alltagswelt an: Betrachten wir einen Zug, der von Frankfurt nach Hamburg fährt, sagen wir er hält nur in Fulda, Kassel, Göttingen und Hannover. Den Zug auf seinem Gleis beschreiben wir abstrakt als Massepunkt. Er ist zwar ausgedehnt, vielleicht sogar ziemlich lang, kann aber als starrer Körper betrachtet werden. Dann haben alle Punkte, aus denen er sich zusammensetzt, während der Reise immer denselben Abstand voneinander. Das ist natürlich eine Näherung. Der Zug hat ja Gelenke und es treten beispielsweise Erschütterungen und Materialspannungen auf, aber für unsere Betrachtung sehen wir ihn einfach als Punkt an, eben als den Massepunkt. Die Strecke Frankfurt – Hamburg legt er auf den Gleisen der Bahntrasse zurück. Diese können wir als eindimensionale Kurve abstrakt beschreiben. Der Zug muss den Gleisen folgen und er durchläuft jeden Punkt darauf. Somit kann für jeden beliebigen Zeitpunkt t der Reise ein Punkt x auf der Strecke gefunden werden. Betrachten wir das für die Haltestellen und nehmen wir an, der Zug fährt um 10.00 Uhr in Frankfurt los:

Frankfurt (M)	*10.00*
Fulda	*10.50*
Kassel	*11.55*
Göttingen	*12.25*
Hannover	*13.05*
Hamburg	*13.30*

Es liegt also eine eindeutige Zuordnung von Raum und Zeitpunkten vor, die man in diesem Fall ›Fahrplan‹ nennt. Im Prinzip kann man jedem Streckenpunkt einen Zeitpunkt zuordnen, weil eben jeder der Punkte auf der Strecke durchlaufen wird. Der Ort x ist dann eine Funktion der Zeit t, also $x(t) = f(t)$. Wie die Kurve f aussieht, kann man im Allgemeinen nicht sagen. Man kann sie jedoch empirisch bestimmen, indem man misst und die Messpunkte verbindet. Die Verbindung ist bei den Systemen der klassischen Mechanik dadurch gerechtfertigt, dass man die obige Annahme machen kann, nämlich, dass jeder der Punkte auf der Strecke durchlaufen wird. Man erhält eine ähnliche Kurve wie in Abbildung 3.

Leider ist hier die exakte mathematische Form der Kurve nicht bekannt, man verfügt also über keinen algebraischen Ausdruck für f. Mit dem Fahrplan oder der Graphik in Abbildung 3 liegt praktisch eine Form der Bewegungsgleichung vor, jedoch eben nicht in algebraischer Form. Ist das ein Problem? Nun, das kommt auf die Aufgabenstellung an. Wenn ich in den Zug zusteigen möchte und habe den Fahrplan, der mir sagt, dass Göttingen um 12.25 Uhr erreicht ist, so kann ich mit dieser Information das Zusteigeproblem lösen. Ich bin einfach rechtzeitig in Göttingen am Bahnhof. Stellt sich aber eine andere Frage, zum Beispiel: ›Wie schnell ist der Zug zwischen Göttingen und Hamburg?‹, so sieht es schon anders aus. Man kann zwar rechnen, hat aber zu wenig Informationen. Bestimmen kann man jedoch die Differenzen der Orts- und Zeitwerte, also $x(HH)-x(GÖ)$ für die zurückgelegte Strecke und $t(HH)-t(GÖ)$ für die vergangene

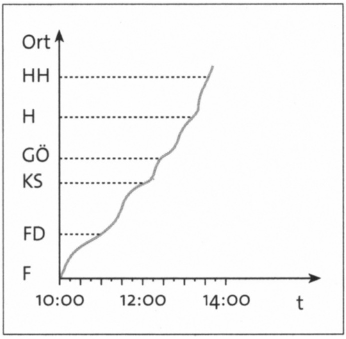

Abbildung 3: Raum-Zeit-Diagramm der Zugbewegung

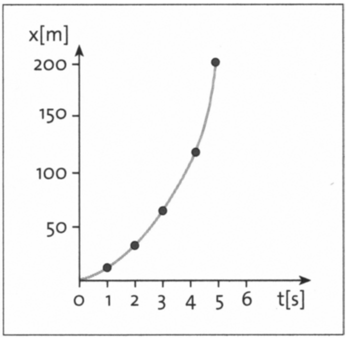

Abbildung 4: Raum-Zeit-Diagramm eines frei fallenden Körpers

Zeit. Man kann nun die Werte für die Entfernung in km einsetzen und für die Zeit in Stunden. Bildet man nun den Quotienten, so erhält man die Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h. Wählt man entsprechende Einheiten, so lässt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit auch in Metern pro Sekunde (m/s) angeben. Will man nun aber die Geschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt t wissen, so kann man sie nicht direkt rechnerisch angeben. Die Graphik in Abbildung 3 eröffnet jedoch einen Weg. Zeichnet man im Punkt $(x(t),t)$ eine Tangente an die Kurve, so kann man aus ihrer Steigung die Geschwindigkeit ermitteln. Die Kurve stellt die Ortsveränderung in Abhängigkeit von der Zeit dar, ist also ein r-t-Diagramm – wobei r in unserem Beispiel nur die Komponente x hat, also gewissermaßen ein eindimensionaler Vektor ist. Steigt die Kurve steil, so erfolgt in kurzer Zeit eine deutliche Ortsveränderung: Der beschriebene Punkt bewegt sich mit hoher Geschwindigkeit; steigt die Kurve nur schwach, so erfolgt die Bewegung langsam. Bei parallel zur t-Achse verlaufender Kurve ist die Steigung null, also auch die Geschwindigkeit: Der Massepunkt ist in Ruhe. Die Verbindungen der Messpunkte sind jedoch Extrapolationen: Es wurde gar nicht jeder Punkt gemessen, die Kurve ist einfach so durchgezogen worden und somit sind auch all diese abgelesenen Geschwindigkeiten nicht exakt, verlässlich ist allein die Durchschnittsgeschwindigkeit. Die Konzeption der klassischen Mechanik erlaubt es jedoch, jedem Punkt im Bewegungsverlauf eine exakte Geschwindigkeit zuzuordnen, wenn man die Bewegungsgleichung kennt und somit einen algebraischen Ausdruck für das f in der Gleichung $x = f(t)$ besitzt. Wie kommt das?

Betrachten wir eine andere Art von Bewegung, die nicht so kompliziert erfolgt wie die des Zuges: den freien Fall. Hier können auch wieder die gleichen Koordinaten zur Beschreibung der Bewegung benutzt werden. Es sei ein Ball, der auf den Boden fällt. Dann ist t die Zeit, die seit seinem Start vergangen ist und x die zurückgelegte Strecke. Der Einfachheit halber werde t in Sekunden gemessen und x in Metern. Das Messintervall sei eine Sekunde und man erhält beispielsweise:

t in Sekunden	*x in Metern*
0	*0*
1	*8*
2	*32*
3	*72*
4	*128*
5	*200*

Trägt man nun diese Werte in analoger Weise wieder in eine Graphik ein, so erhält man Abbildung 4. Seit Galilei wissen wir, was das für eine Kurve ist. Der freie Fall wird durch eine Parabel beschrieben. Wie kann man das wissen? Nun: Mit geübtem Auge sieht man es Abbildung 4 an. Könnte es aber nicht ein deformierter Kreis sein, also ein Ellipsensegment? Man kann auch die Tabelle benutzen und die Gesetzmäßigkeit daraus ableiten. Also wieder: x muss eine Funktion der Zeit sein, $x = f(t)$. Machen wir den Parabelansatz $f(t) = kt^2$ und verwenden die Tabelle zur Bestimmung der Konstanten k:

t in Sekunden	t^2	k	*x in Metern*
0	0	–	0
1	1	8	8
2	4	8	32
3	9	8	72
4	16	8	128
5	25	8	200

Tatsächlich: Für jeden Wert von t bildet man das Quadrat t^2 und teilt die Zahl $x(t)$ durch das Quadrat und erhält immer 8. Die Konstante ist also $k = 8$. Das wird manchmal als Methode der Induktion bezeichnet, was allerdings falsch ist, man weiß ja schon vorher, dass die Abhängigkeit mit t^2 geht. Woher man das weiß, bleibt also noch unklar; man kann es erraten. Wenn wir über den Newton'schen Formalismus verfügen, werden wir sehen, dass dieses Gesetz sich aus der auf den fallenden Körper wirkenden Kraft ergibt. Das Galilei'sche Fallgesetz folgt dann aus den Newton'schen Gleichungen, wenn man die auf den Massepunkt m wirkende Kraft im Schwerefeld der Erde durch die Erdbeschleunigung g ausdrückt. Aber das benötigen wir für das Argument hier nicht, uns genügt zunächst einmal $x(t) = 8t^2$ als Ergebnis. Für diese Bewegung kennen wir also das $f(t)$: Es ist $f(t) = 8\,t^2$.

Was hilft das nun zur Ermittlung der Geschwindigkeit? Zwar kennen wir die Durchschnittsgeschwindigkeit, aber auf die Frage nach der genauen Geschwindigkeit zu jedem Punkt bleibt der Fahrplan die Antwort schuldig. Wie erhält man also eine Zuordnung eines Geschwindigkeitswertes für jeden Zeitpunkt? Bezeichnet man die Geschwindigkeit mit v, so ist also eine Zuordnung $v(t) = f'(t)$ gesucht – die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit. Nehmen wir die zwei Ortspunkte $x(H)$ und $x(HH)$, also Hannover und Hamburg, und zwei Zeitpunkte $t(H)$ und $t(HH)$, die die zeitliche Koordinate an diesen

Ortspunkten liefern. Die Differenzen durcheinander geteilt hatten die Durchschnittsgeschwindigkeit geliefert. Als Abkürzung für die Differenzen kann man $\Delta x = x(HH) - x(H)$ und $\Delta t = t(HH) - t(H)$ schreiben. Die Geschwindigkeit v ist dann der Quotient $v = \Delta x / \Delta t$. Zur Ermittlung der Geschwindigkeit in einem einzelnen Punkt der Strecke muss man die Differenzen in diesem Ausdruck kleiner und kleiner werden lassen. Das nennt man in der Mathematik einen Grenzprozess und den durchläuft man in der Weise, dass die Differenzen schließlich beliebig klein sind. Der Punkt von Interesse ist sozusagen auf der kontinuierlichen Strecke der mathematischen Kurve eingekreist. Man kann schreiben

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \ .$$

Damit hat man auch gleich mehr über die Bewegung herausgefunden, nämlich, dass die Ortsveränderung Δx eines bewegten Punktes gleich dessen Geschwindigkeit mal der Zeitveränderung, also $v\,\Delta t$ ist. Das gilt natürlich nur, wenn die Geschwindigkeit sich im Zeitraum Δt nicht verändert, was wiederum nur dann der Fall ist, wenn Δt zu klein ist, um eine solche Veränderung zuzulassen, also wenn es im eben beschriebenen mathematischen Grenzübergang tatsächlich gegen Null geht. In der Physik schreibt man für diese Größen $dx = v dt$. dx und dt sind die Infinitesimale der Infinitesimalrechnung, die von Newton und Leibniz zur Beschreibung von Bewegungsvorgängen entwickelt wurde. Es sind dies die beliebig kleinen Größen, für die erst eine mathematische Behandlungsweise entwickelt werden musste.

Dieses Beschreibungsverfahren hilft über ein uraltes Problem der Naturphilosophie hinweg, nämlich über die Frage, wie es überhaupt zu Bewegung kommen kann.

Das Problem von Ruhe und Bewegung ist nicht trivial. Ein bewegtes Objekt durchläuft eine Bahn und diese soll mathematisch beschrieben werden. Fasst man diese Bahn als mathematische Kurve auf, handelt man sich das Kontinuumsproblem ein. Stellen wir uns eine Kugel vor, die auf einem Billiardtisch rollt, die Bahn sei eine gerade Strecke. Wie beschreibt man nun die Bewegung? Zum Zeitpunkt t_0 soll die Kugel angestoßen werden und dann durchläuft sie die Bahnpunkte. Dass das nicht so einfach ist, hat man schon in der antiken Diskussion der Bewegung herausgefunden: Wie schafft die Kugel es, von einem Punkt zum anderen zu kommen? Die Frage ist deshalb schwierig, weil die mathematische Vorstellung von einer solchen Strecke davon ausgeht, dass sie sich aus Punkten zusammensetzt und zwar aus unendlich vielen Punkten. Sucht man sich also auf der Bahnstrecke zwei beliebige Punkte aus und sieht sich an, wie die Kugel vom einen zum anderen kommt, so stellt man fest, dass zwischen diesen beliebigen Punkten eben unendlich viele andere liegen, die auch durchlaufen werden müssen. Die griechischen Naturphilosophen nahmen solche mathematischen Probleme sehr ernst. Einige von ihnen, die Eleaten, leugneten deshalb sogar jede Bewegung: Die wahre, nämlich mathematisch verfasste Welt war frei von allen Veränderungen. Zeno von Elea formulierte eine Reihe von berühmten Teilungs- und Bewegungsparadoxien, die das Kontinuumsproblem auf konkrete Probleme der physikalischen Welt übertrugen.

Ein Argument richtete sich gegen den Atomismus: Ist jede Strecke unendlich oft teilbar, muss das auch mit realen Körpern möglich sein, sofern man keinen Grund angeben kann, warum man an einem bestimmten Punkt mit dem Teilen aufhören muss. Bekannter ist Zenos paradoxer Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte: Achilles läuft 100-mal schneller als die Schildkröte, deshalb erhält die Schildkröte einen Vorsprung von 100 Metern. Hat Achilles die ersten 100 Meter hinter sich, ist die Schildkröte nur einen Meter vorangekommen, hat also diesen einen Meter Vorsprung vor Achilles. Nun läuft Achilles diesen Meter – und die Schildkröte liegt einen Zentimeter vor ihm. Ist Achilles den Zentimeter gelaufen, ist die Schilkrö-