
Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Mengen und Zahlen	1
1.1.1	Mengen	2
1.1.2	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	3
1.1.3	Reelle Zahlen	4
1.1.4	Komplexe Zahlen	5
1.2	Stetige Funktionen	5
1.2.1	Funktionen	6
1.2.2	Stetigkeit	7
1.2.3	Zusammengesetzte Funktionen	7
1.3	Differenzieren	8
1.3.1	Ableitung	8
1.3.2	Regeln	9
1.3.3	Beispiele	10
1.3.4	Potenzreihen	11
1.4	Elementare Funktionen	12
1.4.1	Exponentialfunktion	13
1.4.2	Logarithmus	14
1.4.3	Sinus und Kosinus	16
1.4.4	Andere Winkelfunktionen	17
1.4.5	Hyperbolischer Sinus, Kosinus und Tangens	19
1.4.6	Die Exponentialfunktion mit komplexem Argument	20
1.4.7	Mehr zu elementaren Funktionen	20
1.5	Integrieren	21
1.5.1	Integral	21
1.5.2	Wie man Integrale berechnet	22
1.5.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	24

1.5.4	Partielles Integrieren	25
1.5.5	Substitutionsregel	25
1.5.6	Die Quadratur des Kreises	26
2	Gewöhnliche Differentialgleichungen	29
2.1	Erste Ordnung	29
2.1.1	Richtungsfeld	30
2.1.2	Integration	31
2.1.3	Trennung der Variablen	31
2.1.4	Lineare Differentialgleichungen	32
2.1.5	Kausale Lösungen	33
2.2	Zweite Ordnung	34
2.2.1	Definition und Klassifikation	35
2.2.2	Einfache Beispiele	35
2.2.3	Konstante Koeffizienten	36
2.2.4	Erzwungene harmonische gedämpfte Schwingung	38
2.3	Mehr über gewöhnliche Differentialgleichungen	39
2.3.1	Systeme gekoppelter Differentialgleichungen	40
2.3.2	Anfangswertproblem und Runge-Kutta-Verfahren	40
2.3.3	Methode der finiten Differenzen	43
2.3.4	Eigenwertprobleme	44
3	Felder	47
3.1	Skalar- und Vektorfelder	47
3.1.1	Verschiebung und Drehung	48
3.1.2	Felder	49
3.1.3	Gradient	50
3.1.4	Divergenz	51
3.1.5	Tensoren und Einsteinsche Summenkonvention	51
3.1.6	Vektorprodukt	52
3.1.7	Rotation	54
3.1.8	Zweifache Ableitungen von Feldern	54
3.1.9	Bedeutung von Gradient, Divergenz und Rotation	55
3.2	Wegintegrale	58
3.2.1	Parametrisierung	59
3.2.2	Wegintegral	59
3.2.3	Bogenlänge	61

3.2.4	Ein Beispiel	61
3.2.5	Wege und Wegstücke	62
3.2.6	Wegintegral eines Gradientenfeldes	62
3.3	Flächenintegrale und der Satz von Stokes	62
3.3.1	Fläche	63
3.3.2	Flächenintegral	64
3.3.3	Der Satz von Stokes	65
3.3.4	Ein Beispiel	66
3.4	Gebietsintegrale und der Satz von Gauß	67
3.4.1	Gebiet	67
3.4.2	Gebietsintegral	68
3.4.3	Wechsel der Parametrisierung	69
3.4.4	Der Gaußsche Satz	69
4	Partielle Differentialgleichungen	71
4.1	Problemarten	71
4.1.1	Notation	72
4.1.2	Randwertprobleme	72
4.1.3	Anfangswertprobleme	73
4.1.4	Eigenwertprobleme	73
4.1.5	Stephan-Probleme	74
4.2	Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen	74
4.2.1	Symmetrie	74
4.2.2	Reihenentwicklung	75
4.3	Methode der Finiten Differenzen	77
4.3.1	Differenzen anstelle von Differentialen	78
4.3.2	Schwingungsmoden	78
4.3.3	Äquidistante Stützstellen	79
4.3.4	Der Laplace-Operator	79
4.3.5	Dünn besetzte Matrizen	80
4.3.6	Die Lösung	81
4.4	Methode der Finiten Elemente	82
4.4.1	Schwache Form einer partiellen Differentialgleichung ...	83
4.4.2	Galerkin-Methode	83
4.4.3	Finite Elemente	84
4.5	Crank-Nicolson-Verfahren	87
4.5.1	Zwei Ausbreitungsprobleme	87

4.5.2	Stabilitätsüberlegungen	88
4.5.3	Wärmeleitungsgleichung	90
5	Lineare Operatoren	93
5.1	Lineare Abbildungen	93
5.1.1	Lineare Räume	94
5.1.2	Lineare Abbildungen	95
5.1.3	Ring der linearen Abbildungen	95
5.2	Lineare Operatoren im Hilbert-Raum	96
5.2.1	Hilbert-Raum	96
5.2.2	Lineare Operatoren	99
5.3	Projektoren auf Teilräume	99
5.3.1	Teilräume	100
5.3.2	Projektoren	100
5.3.3	Zerlegung der Eins	101
5.4	Normale Operatoren	102
5.4.1	Spektralzerlegung	102
5.4.2	Selbstadjungierte Operatoren	103
5.4.3	Positive Operatoren	104
5.4.4	Unitäre Operatoren	104
5.4.5	Dichteoperatoren	105
5.4.6	Normale Operatoren im \mathbb{C}^n	106
5.5	Funktionen von Operatoren	107
5.5.1	Potenzreihe eines Operators	107
5.5.2	Funktion eines normalen Operators	108
5.5.3	Ein Beispiel	109
5.5.4	Abelsche Gruppen und Erzeugende	110
5.6	Translationen	110
5.6.1	Periodische Randbedingungen	110
5.6.2	Definitionsbereich des Impulses	111
5.6.3	Spektralzerlegung des Impulses	112
5.7	Fourier-Transformation	113
5.7.1	Fourier-Reihe	113
5.7.2	Fourier-Entwicklung	114
5.7.3	Fourier-Integral	114
5.8	Ort und Impuls	116
5.8.1	Testfunktionen	116

5.8.2	Kanonische Vertauschungsregeln	116
5.8.3	Unschärfebeziehung	117
5.8.4	Quasi-Eigenfunktionen	118
5.9	Leiter-Operatoren	119
5.9.1	Auf- und Absteige-Operatoren	119
5.9.2	Grundzustand und angeregte Zustände	120
5.9.3	Harmonischer Oszillator	121
5.10	Drehgruppe	122
5.10.1	Drehimpuls	122
5.10.2	Eigenräume	122
5.10.3	Bahndrehimpuls	124
5.10.4	Laplace-Operator	125
6	Verschiedenes	127
6.1	Fourier-Zerlegung	128
6.1.1	Fourier-Summe	128
6.1.2	Schnelle Fourier-Transformation	130
6.1.3	Fourier-Reihe	133
6.1.4	Fourier-Zerlegung periodischer Funktionen	134
6.1.5	Fourier-Integrale	135
6.1.6	Faltung	136
6.2	Analytische Funktionen	136
6.2.1	Komplexe Zahlen	137
6.2.2	Komplexe Differenzierbarkeit	139
6.2.3	Potenzreihen	142
6.2.4	Komplexe Wegintegrale	144
6.3	Tensoren	148
6.3.1	Verschiedene Koordinatensysteme	149
6.3.2	Kontra- und kovariant	150
6.3.3	Tensoren	150
6.3.4	Kovariante Ableitung	152
6.4	Transformationsgruppen	153
6.4.1	Gruppen	153
6.4.2	Transformationen	155
6.4.3	Galilei-Gruppe	156
6.4.4	Poincaré-Gruppe	157
6.4.5	Kristall-Symmetrie	160

6.5	Optimierung	163
6.5.1	Kostenfunktion	163
6.5.2	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	164
6.5.3	Endlich statt unendlich viele Dimensionen	166
6.5.4	Nicht-lineare Optimierung	169
6.6	Variationsrechnung	171
6.6.1	Fréchet-Ableitung eines Funktionals	171
6.6.2	Kürzester Weg zwischen zwei Punkten	172
6.6.3	Variation mit Nebenbedingung	173
6.6.4	Mehr Beispiele	174
6.7	Legendre-Transformation	176
6.7.1	Konvexe Mengen und konvexe Funktionen	176
6.7.2	Summe, Supremum und Infimum, Krümmung	177
6.7.3	Legendre-Transformation einer konvexen Funktion	177
6.7.4	Ableitung der Legendre-Transformierten	179
7	Tiefere Einsichten	181
7.1	Grundlagen der Topologie	182
7.1.1	Topologischer Raum	182
7.1.2	Metrischer Raum	183
7.1.3	Linearer Raum mit Norm	184
7.1.4	Linearer Raum mit Skalarprodukt	185
7.1.5	Konvergente Folgen	185
7.1.6	Stetigkeit	186
7.1.7	Banachscher Fixpunktsatz	187
7.2	Maßtheorie und Lebesgue-Integral	189
7.2.1	Maßraum	189
7.2.2	Borel-Mengen	190
7.2.3	Messbare Funktionen	190
7.2.4	Lebesgue-Integral	191
7.2.5	Bemerkungen	192
7.3	Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie	195
7.3.1	Wahrscheinlichkeitsraum	195
7.3.2	Zufallsvariable	196
7.3.3	Gesetz der großen Zahlen	199
7.3.4	Zentraler Grenzwertsatz	199
7.4	Verallgemeinerte Funktionen	200

7.4.1	Testfunktionen	200
7.4.2	Distributionen	201
7.4.3	Ableitung	202
7.4.4	Fourier-Transformation.....	203
7.4.5	Beispiele	204
Matlab	207
A.1	Einführung in MATLAB.....	207
A.1.1	Kommandozeile	208
A.1.2	Matrizen	209
A.1.3	Punktweise Operationen.....	211
A.1.4	Matrixoperationen	212
A.1.5	Programme	213
A.1.6	Funktionen	216
A.1.7	Vermischtes.....	218
A.2	Kommentierte Programme	222
A.2.1	Einfache Graphik.....	222
A.2.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen: Kepler-Problem ..	224
A.2.3	Gewöhnliche Differentialgleichungen: Randwertproblem	228
A.2.4	Partielle Differentialgleichungen: Laplace-Operator.....	230
Glossar	233
Sachverzeichnis	263