
Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen und Anzahl	1
1.1	Reelle Zahlen	1
1.1.1	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	2
1.1.2	Dezimalbrüche und reelle Zahlen	3
1.1.3	Anordnung	6
1.1.4	Betrag	8
1.1.5	Maximum, Minimum und Schranken	9
1.1.6	Potenzen und Wurzeln	11
1.2	Binomialkoeffizient	14
1.2.1	Fakultät und Binomialkoeffizient	14
1.2.2	Der binomische Lehrsatz	17
1.3	Kombinatorik	19
1.3.1	Permutationen	20
1.3.2	Kombinationen	21
1.4	Exkurse	23
1.4.1	Summenzeichen, Produktzeichen	23
1.4.2	*Vollständige Induktion	25
1.5	Aufgaben	26
2	Folgen und Reihen	31
2.1	Zahlenfolgen	31
2.1.1	Definitionen und Beispiele	32
2.1.2	Konvergenz	34
2.1.3	Bestimmte Divergenz	36
2.2	Konvergenzkriterien für Folgen	37
2.2.1	Einschließung	38
2.2.2	Der Hauptsatz für monotone Folgen	40
2.2.3	Anwendungen von Folgen	42
2.3	Reihen	43
2.3.1	Definition und Beispiele	43
2.3.2	Harmonische und Geometrische Reihe	47

2.3.3	Konvergenzkriterien für Reihen	48
2.3.4	Weitere Kriterien, Zahl e	50
2.4	Potenz und Logarithmus	52
2.4.1	Potenz	52
2.4.2	Logarithmus	54
2.4.3	Anwendungen des Logarithmus	56
2.5	Aufgaben	57
3	Funktionen	61
3.1	Definitionen und Beispiele	61
3.1.1	Der Funktionsbegriff	61
3.1.2	Grafische Darstellung, Monotonie	63
3.1.3	Summe, Produkt und Komposition von Funktionen	66
3.1.4	Umkehrfunktionen	67
3.2	Elementare Funktionen	70
3.2.1	Polynomfunktionen und rationale Funktionen	70
3.2.2	Exponentialfunktion	72
3.2.3	Logarithmusfunktion, allgemeine Exponentialfunktion	75
3.2.4	Trigonometrische Funktionen: \sin und \cos	75
3.2.5	Eigenschaften von \sin und \cos ; Tangens	78
3.2.6	Anwendungen von \sin und \cos	80
3.2.7	Arcusfunktionen	82
3.3	Stetigkeit	84
3.3.1	Grenzwert von Funktionen	84
3.3.2	Stetigkeit von Funktionen	88
3.3.3	Eigenschaften stetiger Funktionen	92
3.4	*Anhang	95
3.5	Aufgaben	96
4	Differentialrechnung	101
4.1	Differenzierbarkeit	101
4.1.1	Motivierung	101
4.1.2	Differenzierbarkeit und Ableitung	102
4.1.3	Sätze über differenzierbare Funktionen	104
4.1.4	Monotonie und Konvexität	106
4.2	Ableitungsregeln	108
4.2.1	Produkt- und Quotientenregel	108
4.2.2	Ableitung von Polynomen	109
4.2.3	Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion	110
4.2.4	Ableitung elementarer Funktionen	112
4.3	Anwendung der Differentialrechnung	113
4.3.1	Lokale Extrema, Kriterien	113
4.3.2	Anwendungen: Bestimmung eines Extremums	115
4.3.3	Kurvendiskussion	117
4.3.4	Regeln von de l'Hospital	119

4.3.5	Taylorreihen	121
4.3.6	Newton Verfahren	123
4.4	Differentialgleichungen	126
4.4.1	Wachstumsgleichungen	126
4.4.2	Schwingungsgleichungen	128
4.4.3	*Lineare Differentialgleichungen	130
4.5	*Anhang	131
4.6	Aufgaben	132
5	Integralrechnung	137
5.1	Das bestimmte Integral	138
5.1.1	Motivierung	138
5.1.2	Definitionen	139
5.1.3	Integrierbarkeit	141
5.1.4	Eigenschaften des Integrals	144
5.2	Stammfunktion und Hauptsatz	146
5.2.1	Unbestimmtes Integral, Stammfunktion	146
5.2.2	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	148
5.2.3	Anwendungen des Hauptsatzes	150
5.2.4	Formelsammlung und Beispiele	152
5.3	Integrationsmethoden	153
5.3.1	$\log g$ als Stammfunktion	153
5.3.2	Substitution	154
5.3.3	Partielle Integration	155
5.3.4	Partialbruchzerlegung	157
5.3.5	Weitere Beispiele	159
5.4	Uneigentliche Integrale	161
5.4.1	Unbeschränkte Funktion	161
5.4.2	Unbeschränktes Intervall	164
5.4.3	Gamma-Funktion, Gaußsche Glockenfunktion	166
5.5	*Anhang	169
5.6	Aufgaben	170
6	Komplexe Zahlen, Fourierreihen	173
6.1	Komplexe Zahlen	173
6.1.1	Definitionen und Rechenregeln	173
6.1.2	Gaußsche Zahlenebene, Polarkoordinaten	175
6.1.3	Potenzen, Wurzeln	177
6.2	Komplexe Polynom- und Exponentialfunktion	178
6.2.1	*Komplexe Polynome	179
6.2.2	Komplexe Exponentialfunktion	180
6.2.3	Anwendung: Schwingkreis	181
6.3	Fourierreihen	183
6.3.1	Periodische Funktionen, Basisfunktionen	184
6.3.2	Trigonometrische Polynome	186

6.3.3	Fourier-Reihe einer Funktion f	188
6.3.4	Beispiele von Fourierreihen	189
6.4	Anhang	193
6.5	Aufgaben	193
7	Vektoren- und Matrizenrechnung	195
7.1	Vektoren	195
7.1.1	Der Raum \mathbb{R}^p	196
7.1.2	Skalarprodukt, Norm	198
7.1.3	Anwendung: Winkel und Projektion	200
7.2	Matrizen	201
7.2.1	Definitionen	201
7.2.2	Matrixoperationen	202
7.2.3	Spezielle Matrizen	205
7.2.4	Determinante	207
7.2.5	Lineare Unabhängigkeit, Rang einer Matrix	210
7.3	Anwendungen der Matrizenrechnung	212
7.3.1	Transformationen	212
7.3.2	Lineare Gleichungssysteme	215
7.3.3	Lösungsgesamtheit von $A \cdot x = b$	217
7.3.4	*Eigenwerte und Eigenvektoren	219
7.4	Aufgaben	221
8	Mehrdimensionale Differentialrechnung	225
8.1	Vektorwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher	225
8.1.1	Definitionen und Beispiele	226
8.1.2	Stetigkeit	230
8.1.3	Beispiele stetiger Funktionen	231
8.2	Kurven im \mathbb{R}^m	233
8.2.1	Definitionen und Beispiele	233
8.2.2	Tangentialvektor	236
8.2.3	Kurvenlänge	237
8.3	Partielle Ableitungen	239
8.3.1	Definition und Beispiele	239
8.3.2	Gradient, Funktionalmatrix	241
8.3.3	Kettenregel	244
8.3.4	Richtungsableitung	246
8.3.5	Höhere partielle Ableitungen, Hessematrix	249
8.4	Anwendungen der mehrdimensionalen Differentialrechnung	250
8.4.1	Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher	250
8.4.2	Extrema unter Nebenbedingungen	253
8.5	Aufgaben	256

9	Wahrscheinlichkeitsrechnung	261
9.1	Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeitsraum	261
9.1.1	Ergebnisse, Ereignisse	262
9.1.2	Wahrscheinlichkeit	264
9.1.3	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	265
9.1.4	Spezielle diskrete Verteilungen	268
9.1.5	Stetige Wahrscheinlichkeitsräume	271
9.1.6	Spezielle stetige Verteilungen	273
9.1.7	Normalverteilung (Gaußverteilung)	275
9.2	Zufallsvariable	277
9.2.1	Definitionen und Beispiele	278
9.2.2	Normalverteilte Zufallsvariable	280
9.2.3	Erwartungswert	283
9.2.4	Varianz, Standardabweichung	285
9.2.5	Kovarianz, Korrelation	287
9.3	Anhang	289
9.4	Aufgaben	290
10	Statistik	293
10.1	Beschreibende Statistik	293
10.1.1	Daten	294
10.1.2	Univariate Stichproben: Histogramm und Quantile	295
10.1.3	Univariate Stichproben: Lage und Streuung	297
10.1.4	Bivariate Stichproben: Korrelation	300
10.1.5	Bivariate Stichproben: Regression	302
10.2	Schließende Statistik	304
10.2.1	Einführung und Beispiele	304
10.2.2	Parameter-Schätzung	306
10.2.3	Konfidenzintervall	307
10.2.4	Signifikanztests	308
10.3	Anwendung auf univariate Stichproben	309
10.3.1	Parameter p der Binomialverteilung	310
10.3.2	t-Verteilung und ihre Quantile	312
10.3.3	Parameter der Normalverteilung, Ein-Stichproben Situation	314
10.3.4	Parameter der Normalverteilung, Zwei-Stichproben Situation	315
10.3.5	χ^2 -Verteilung und ihre Quantile	317
10.3.6	χ^2 -Anpassungstest	317
10.4	Anwendung auf bivariate Stichproben	320
10.4.1	Korrelationskoeffizient r	320
10.4.2	χ^2 -Unabhängigkeitstest	322
10.5	Aufgaben	325

XII Inhaltsverzeichnis

10.6 Datenblatt	327
10.6.1 Datei Toskana	327
10.6.2 Datei Spessart	328
Literaturverzeichnis	329
Index	331