

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Elementare Newton'sche Mechanik</b>	
1.1 Die Newton'schen Gesetze (1687) und ihre Interpretation	1
1.2 Gleichförmig geradlinige Bewegung und Inertialsysteme	5
1.3 Inertialsysteme in relativer Bewegung	6
1.4 Impuls und Kraft	7
1.5 Typische Kräfte; Bemerkung über Maßeinheiten	9
1.6 Raum, Zeit und Kräfte	11
1.7 Das Zwei-Teilchen-System mit inneren Kräften	12
1.7.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung	12
1.7.2 Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Kepler-Problem)	13
1.7.3 Schwerpunkts- und Relativimpuls im Zwei-Teilchen-System	17
1.8 Systeme von endlich vielen Teilchen	18
1.9 Der Schwerpunktsatz	19
1.10 Der Drehimpulssatz	20
1.11 Der Energiesatz	20
1.12 Das abgeschlossene $n$ -Teilchen-System	21
1.13 Galilei-Transformationen	22
1.14 Raum und Zeit der Mechanik bei Galilei-Invarianz	26
1.15 Konservative Kraftfelder	28
1.16 Eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes	30
1.17 Bewegungsgleichungen in einer Dimension	31
1.17.1 Harmonischer Oszillator	31
1.17.2 Das ebene mathematische Pendel im Schwerfeld	33
1.18 Phasenraum für das $n$ -Teilchen-System (im $\mathbb{R}^3$ )	34
1.19 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen	35
1.20 Physikalische Konsequenzen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes	36
1.21 Lineare Systeme	39
1.22 Zur Integration eindimensionaler Bewegungsgleichungen	40
1.23 Das ebene Pendel bei beliebigem Ausschlag	42
1.24 Das Zwei-Teilchen-System mit Zentralkraft	44
1.25 Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte	48
1.26 Coriolis-Beschleunigung auf der Erde	49
1.27 Streuung zweier Teilchen, die über eine Zentralkraft miteinander wechselwirken: Kinematik	57
1.28 Zwei-Teilchenstreuung mit Zentralkraft: Dynamik	60
1.29 Coulomb-Streuung zweier Teilchen mit gleichen Massen und Ladungen	63
1.30 Ausgedehnte mechanische Körper	65
1.31 Virial und zeitliche Mittelwerte	69
Anhang: Praktische Übungen	71

## 2. Die Prinzipien der kanonischen Mechanik

<b>2.1</b>	<b>Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten</b> .....	79
2.1.1	Definition von Zwangsbedingungen.....	79
2.1.2	Generalisierte Koordinaten.....	81
<b>2.2</b>	<b>Das d'Alembert'sche Prinzip</b> .....	81
2.2.1	Definition der virtuellen Verrückungen.....	81
2.2.2	Statischer Fall.....	82
2.2.3	Dynamischer Fall.....	82
<b>2.3</b>	<b>Die Lagrange'schen Gleichungen</b> .....	84
<b>2.4</b>	<b>Einfache Anwendungen des d'Alembert'schen Prinzips</b> .....	85
<b>2.5</b>	<b>Exkurs über Variationsprinzipien</b> .....	87
<b>2.6</b>	<b>Hamilton'sches Extremalprinzip</b> .....	89
<b>2.7</b>	<b>Die Euler-Lagrange-Gleichungen</b> .....	90
<b>2.8</b>	<b>Einige Anwendungen des Hamilton'schen Prinzips</b> .....	91
<b>2.9</b>	<b>Lagrangefunktionen sind nicht eindeutig</b> .....	93
<b>2.10</b>	<b>Eichtransformationen an der Lagrangefunktion</b> .....	94
<b>2.11</b>	<b>Zulässige Transformationen der verallgemeinerten Koordinaten</b> .....	95
<b>2.12</b>	<b>Die Hamiltonfunktion und ihr Zusammenhang mit der Lagrangefunktion</b> .....	97
<b>2.13</b>	<b>Legendre-Transformation für den Fall einer Variablen</b> .....	98
<b>2.14</b>	<b>Legendre-Transformation im Fall mehrerer Veränderlicher</b> .....	99
<b>2.15</b>	<b>Kanonische Systeme</b> .....	101
<b>2.16</b>	<b>Einige einfache kanonische Systeme</b> .....	101
<b>2.17</b>	<b>Variationsprinzip auf die Hamiltonfunktion angewandt</b> .....	103
<b>2.18</b>	<b>Symmetrien und Erhaltungssätze</b> .....	104
<b>2.19</b>	<b>Satz von E. Noether</b> .....	105
<b>2.20</b>	<b>Infinitesimale Erzeugende für Drehung um eine Achse</b> .....	106
<b>2.21</b>	<b>Exkurs über die Drehgruppe</b> .....	108
<b>2.22</b>	<b>Infinitesimale Drehungen und ihre Erzeugenden</b> .....	110
<b>2.23</b>	<b>Kanonische Transformationen</b> .....	112
<b>2.24</b>	<b>Beispiele von kanonischen Transformationen</b> .....	116
<b>2.25</b>	<b>Die Struktur der kanonischen Gleichungen</b> .....	117
<b>2.26</b>	<b>Lineare, autonome Systeme in einer Dimension</b> .....	118
<b>2.27</b>	<b>Kanonische Transformationen in kompakter Notation</b> .....	119
<b>2.28</b>	<b>Zur symplektischen Struktur des Phasenraums</b> .....	121
<b>2.29</b>	<b>Der Liouville'sche Satz</b> .....	125
2.29.1	Lokale Form.....	125
2.29.2	Integrale Form.....	126
<b>2.30</b>	<b>Beispiele zum Liouville'schen Satz</b> .....	127
<b>2.31</b>	<b>Die Poisson-Klammer</b> .....	130
<b>2.32</b>	<b>Eigenschaften der Poisson-Klammern</b> .....	133
<b>2.33</b>	<b>Infinitesimale kanonische Transformationen</b> .....	135
<b>2.34</b>	<b>Integrale der Bewegung</b> .....	136
<b>2.35</b>	<b>Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung</b> .....	139
<b>2.36</b>	<b>Einfache Anwendungen der Hamilton-Jacobi'schen Differentialgleichung</b> .....	140
<b>2.37</b>	<b>Hamilton-Jacobi-Gleichung und integrable Systeme</b> .....	144
2.37.1	Lokale Glättung von Hamilton'schen Systemen.....	145
2.37.2	Integrable Systeme.....	149
2.37.3	Winkel- und Wirkungsvariable.....	153
<b>2.38</b>	<b>Störungen an quasiperiodischen Hamilton'schen Systemen</b> ....	155

2.39	Autonome, nichtausgeartete Hamilton'sche Systeme in der Nähe von integrierbaren Systemen .....	157
2.40	Beispiele, Mittelungsmethode .....	159
2.40.1	Anharmonischer Oszillator .....	159
2.40.2	Mittelung von Störungen .....	161
	Anhang: Praktische Übungen .....	163
<b>3.</b>	<b>Mechanik des starren Körpers</b>	
3.1	Definition des starren Körpers .....	171
3.2	Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers .....	173
3.3	Kinetische Energie und Trägheitstensor .....	174
3.4	Eigenschaften des Trägheitstensors .....	176
3.5	Der Satz von Steiner .....	181
3.6	Beispiele zum Satz von Steiner .....	182
3.7	Drehimpuls des starren Körpers .....	184
3.8	Kräftefreie Bewegung von starren Körpern .....	185
3.9	Die Euler'schen Winkel .....	187
3.10	Definition der Euler'schen Winkel .....	189
3.11	Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers .....	189
3.12	Die Euler'schen Gleichungen .....	192
3.13	Anwendungsbeispiel: Der kräftefreie Kreisel .....	195
3.14	Kräftefreier Kreisel und geometrische Konstruktionen .....	198
3.15	Der Kreisel im Rahmen der kanonischen Mechanik .....	201
3.16	Beispiel: Symmetrischer Kinderkreisel im Schwerfeld .....	204
3.17	Anmerkung zum Kreiselproblem .....	207
3.18	Symmetrischer Kreisel mit Reibung: Der „Aufstehkreisel“ .....	208
3.18.1	Eine Energiebetrachtung .....	210
3.18.2	Bewegungsgleichungen und Lösungen konstanter Energie .....	211
	Anhang: Praktische Übungen .....	216
<b>4.</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	
4.1	Schwierigkeiten der nichtrelativistischen Mechanik .....	220
4.2	Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit .....	223
4.3	Die Lorentz-Transformationen .....	224
4.4	Analyse der Lorentz- und Poincaré-Transformationen .....	230
4.4.1	Drehungen und Spezielle Lorentz-Transformationen .....	233
4.4.2	Bedeutung der Speziellen Lorentz-Transformationen .....	236
4.5	Zerlegung von Lorentz-Transformationen in ihre Komponenten .....	237
4.5.1	Satz über orthochrone eigentliche Lorentz-Transformationen .....	237
4.5.2	Korollar zum Zerlegungssatz und einige Konsequenzen .....	239
4.6	Addition von relativistischen Geschwindigkeiten .....	242
4.7	Galilei- und Lorentz-Raumzeit-Mannigfaltigkeiten .....	245
4.8	Bahnkurven und Eigenzeit .....	249
4.9	Relativistische Dynamik .....	251
4.9.1	Relativistisches Kraftgesetz .....	251
4.9.2	Energie-Impulsvektor .....	252
4.9.3	Die Lorentz-Kraft .....	256
4.10	Zeitdilatation und Längenkontraktion .....	257
4.11	Mehr über die Bewegung kräftefreier Teilchen .....	259
4.12	Die Konforme Gruppe .....	262

<b>5.</b>	<b>Geometrische Aspekte der Mechanik</b>	
5.1	<b>Mannigfaltigkeiten von verallgemeinerten Koordinaten</b>	266
5.2	<b>Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>	269
5.2.1	Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$	269
5.2.2	Glatte oder differenzierbare Mannigfaltigkeiten	270
5.2.3	Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten	272
5.3	<b>Geometrische Objekte auf Mannigfaltigkeiten</b>	276
5.3.1	Funktionen und Kurven auf Mannigfaltigkeiten	277
5.3.2	Tangentialvektoren an eine glatte Mannigfaltigkeit	280
5.3.3	Das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit	281
5.3.4	Vektorfelder auf glatten Mannigfaltigkeiten	283
5.3.5	Äußere Formen	286
5.4	<b>Kalkül auf Mannigfaltigkeiten</b>	288
5.4.1	Differenzierbare Abbildungen von Mannigfaltigkeiten	289
5.4.2	Integralkurven von Vektorfeldern	291
5.4.3	Äußeres Produkt von Einsformen	292
5.4.4	Die äußere Ableitung	294
5.4.5	Äußere Ableitung und Vektoren im $\mathbb{R}^3$	296
5.5	<b>Hamilton-Jacobi'sche und Lagrange'sche Mechanik</b>	299
5.5.1	Koordinaten-Mannigfaltigkeit $Q$ , Geschwindigkeitsraum $TQ$ und Phasenraum $T^*Q$	299
5.5.2	Die kanonische Einsform auf dem Phasenraum	303
5.5.3	Die kanonische Zweiform als symplektische Form auf $M$	306
5.5.4	Symplektische Zweiform und Satz von Darboux	308
5.5.5	Die kanonischen Gleichungen	311
5.5.6	Die Poisson-Klammer	315
5.5.7	Zeitabhängige Hamilton'sche Systeme	318
5.6	<b>Lagrange'sche Mechanik und Lagrangegleichungen</b>	320
5.6.1	Zusammenhang der beiden Formulierungen der Mechanik	320
5.6.2	Die Lagrange'sche Zweiform	322
5.6.3	Energie als Funktion auf $TQ$ und Lagrange'sches Vektorfeld	323
5.6.4	Vektorfelder auf dem Geschwindigkeitsraum $TQ$ und Lagrange'sche Gleichungen	325
5.6.5	Legendre-Transformation und Zuordnung von Lagrange- und Hamiltonfunktion	327
5.7	<b>Riemann'sche Mannigfaltigkeiten in der Mechanik</b>	329
5.7.1	Affiner Zusammenhang und Paralleltransport	330
5.7.2	Parallele Vektorfelder und Geodäten	332
5.7.3	Geodäten als Lösungen von Euler-Lagrange-Gleichungen	333
5.7.4	Der kräftefreie, unsymmetrische Kreisel	335
<b>6.</b>	<b>Stabilität und Chaos</b>	
6.1	<b>Qualitative Dynamik</b>	337
6.2	<b>Vektorfelder als dynamische Systeme</b>	338
6.2.1	Einige Definitionen für Vektorfelder und ihre Integralkurven	340
6.2.2	Gleichgewichtslagen und Linearisierung von Vektorfeldern	343
6.2.3	Stabilität von Gleichgewichtslagen	346
6.2.4	Kritische Punkte von Hamilton'schen Vektorfeldern	349
6.2.5	Stabilität und Instabilität beim kräftefreien Kreisel	352

<b>6.3</b>	<b>Langzeitverhalten dynamischer Flüsse und Abhängigkeit von äußeren Parametern</b>	353
6.3.1	Strömung im Phasenraum	354
6.3.2	Allgemeinere Stabilitätskriterien	356
6.3.3	Attraktoren	359
6.3.4	Die Poincaré-Abbildung	362
6.3.5	Verzweigungen von Flüssen bei kritischen Punkten	366
6.3.6	Verzweigungen von periodischen Bahnen	369
<b>6.4</b>	<b>Deterministisches Chaos</b>	371
6.4.1	Iterative Abbildungen in einer Dimension	371
6.4.2	Quasi-Definition von Chaos	373
6.4.3	Ein Beispiel: Die logistische Gleichung	376
<b>6.5</b>	<b>Quantitative Aussagen über ungeordnete Bewegung</b>	381
6.5.1	Aufbruch in deterministisches Chaos	381
6.5.2	Liapunov'sche Charakteristische Exponenten	385
6.5.3	Seltene Attraktoren und Fraktale	388
<b>6.6</b>	<b>Chaotische Bewegungen in der Himmelsmechanik</b>	390
6.6.1	Rotationsdynamik von Planetensatelliten	391
6.6.2	Bahndynamik von Planetoiden mit chaotischem Verhalten	395
<b>7.</b>	<b>Kontinuierliche Systeme</b>	
7.1	Diskrete und kontinuierliche Systeme	399
7.2	Grenzübergang zum kontinuierlichen System	403
7.3	Hamilton'sches Extremalprinzip für kontinuierliche Systeme	405
7.4	Kanonisch konjugierter Impuls und Hamiltondichte	407
7.5	Beispiel: Die Pendelkette	408
7.6	Ausblick und Bemerkungen	411
<b>Anhang</b>		
<b>A</b>	<b>Einige mathematische Begriffe</b>	417
A.1	„Ordnung“ und „modulo“	417
A.2	Abbildung	417
A.3	Stetige und differenzierbare Abbildungen	419
A.4	Ableitungen	419
A.5	Differenzierbarkeit einer Funktion	420
A.6	Variablen und Parameter	420
A.7	Lie'sche Gruppe	420
<b>B</b>	<b>Einige Hinweise zum Rechnereinsatz</b>	421
B.1	Bestimmung von Nullstellen	422
B.2	Zufallszahlen	423
B.3	Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen	423
B.4	Numerische Auswertung von Integralen	425
<b>C</b>	<b>Historische Anmerkungen</b>	426
<b>Aufgaben</b>		
		431
<b>Lösungen der Aufgaben</b>		
		459
<b>Literatur</b>		
		529
<b>Sachverzeichnis</b>		
		533
<b>Namenverzeichnis</b>		
		537