

Siegfried Flügge

---

# Rechenmethoden der Quantentheorie

Elementare Quantenmechanik  
Dargestellt in Aufgaben und Lösungen

Sechste Auflage  
mit 110 Aufgaben und 34 Abbildungen



Springer

Professor Dr. Siegfried Flügge<sup>†</sup>

Physikalisches Institut  
Fakultät für Physik  
Universität Freiburg im Breisgau  
Hermann-Herder-Straße 3  
D-79104 Freiburg im Breisgau

ISBN 3-540-65599-9 6. Auflage  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 3-540-56776-3 5. Auflage  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

*Flügge, Siegfried:*

Rechenmethoden der Quantentheorie/Siegfried Flügge. – 6. Aufl. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Singapur; Tokio:

Springer, 1999

(Springer-Lehrbuch)

ISBN 3-540-65599-9

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1965, 1976, 1990, 1993, 1999

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Macmillan India Ltd., India; Druck: Langenscheidt KG, Berlin

Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Bindarbeiten: Lüderitz & Bauer, Berlin

SPIN: 10713906

56/3144/ba - 5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

# Inhaltsverzeichnis

<i>A. Einkörperprobleme mit konservativen Kräften</i> .....	1
<i>I. Allgemeine Begriffe</i> .....	5
Mathematische Vorbemerkung .....	5
1. Aufgabe. Erwartungswerte von Impuls und Kraft .....	6
2. Aufgabe. Erwartungswerte von Drehimpuls und Moment .....	7
3. Aufgabe. Energieerhaltungssatz .....	9
4. Aufgabe. Matrixelemente .....	10
5. Aufgabe. Hermitesche Operatoren .....	12
6. Aufgabe. Konstruktion eines Hermiteschen Operators .....	14
7. Aufgabe. Verallgemeinerte Vertauschungsrelationen .....	16
8. Aufgabe. Vertauschung von $p^n$ mit $x^m$ .....	18
9. Aufgabe. Zeitabhängigkeit eines Erwartungswertes .....	19
<i>II. Kräftefreie Bewegung</i> .....	21
Vorbemerkung .....	21
10. Aufgabe. Ebene Wellen .....	21
11. Aufgabe. Wellenpaket .....	24
12. Aufgabe. Kubischer Hohlraum .....	27
13. Aufgabe. Niveaudichte .....	29
<i>III. Eindimensionale Probleme</i> .....	32
Vorbemerkung .....	32
14. Aufgabe. Potentialschacht .....	33
15. Aufgabe. Potentialschacht zwischen Wänden .....	36
16. Aufgabe. Potentialschwelle .....	40
17. Aufgabe. Schmale, hohe Potentialschwelle .....	43
18. Aufgabe. Potentialtopf mit aufgesetzten Wänden .....	46
19. Aufgabe. Resonanz .....	48
20. Aufgabe. Periodische Potentiale .....	52

VIII Inhaltsverzeichnis

21. Aufgabe. Energiebänder ..... 54  
22. Aufgabe. Ein spezielles periodisches Potential ..... 55  
23. Aufgabe. Kamm von Dirac-Funktionen ..... 60  
24. Aufgabe. Harmonischer Oszillator: Schrödingertheorie ..... 65  
25. Aufgabe. Harmonischer Oszillator in Matrixschreibweise ..... 69  
26. Aufgabe. Matrixelemente für den Oszillator ..... 71  
27. Aufgabe. Harmonischer Oszillator: Hilbertraum ..... 74  
28. Aufgabe. Oszillator-Eigenfunktionen aus Hilbertvektoren ..... 77  
29. Aufgabe. Potentialstufe ..... 79  
30. Aufgabe. Potentialschwelle ..... 83  
31. Aufgabe. Potentialtopf ..... 86  
32. Aufgabe. Homogenes elektrisches Feld ..... 90  
33. Aufgabe. Freier Fall nach der Quantenmechanik ..... 92  
34. Aufgabe. Eikonal-Näherung (WKB-Methode) ..... 95  
35. Aufgabe. WKB-Methode: Randwertproblem ..... 98  
36. Aufgabe. WKB-Näherung für den Oszillator ..... 101  
37. Aufgabe. Anharmonischer Oszillator ..... 102

IV. Zentralsymmetrische Probleme ..... 105

Mathematische Vorbemerkung ..... 105  
a) Drehimpuls ..... 108  
38. Aufgabe. Vertauschungsrelationen ..... 108  
39. Aufgabe. Transformation auf Kugelkoordinaten ..... 110  
40. Aufgabe. Hilbertraum zu festem  $l$ -Wert ..... 112  
b) Gebundene Zustände ..... 114  
41. Aufgabe. Hohlkugel ..... 114  
42. Aufgabe. Erwartungswert der Energie ..... 117  
43. Aufgabe. Kugeloszillator ..... 119  
44. Aufgabe. Entartung beim Kugeloszillator ..... 121  
45. Aufgabe. Keplerproblem ..... 124  
46. Aufgabe. Kratzersches Molekülpotential ..... 126  
47. Aufgabe. Morsesches Molekülpotential ..... 131  
48. Aufgabe. Zentralkraftmodell des Deuterons ..... 135  
49. Aufgabe. Stark-Effekt am Rotator ..... 138  
c) Zustände im Kontinuum. Elastische Streuung ..... 141  
50. Aufgabe. Coulomb-Abstoßung ..... 141  
51. Aufgabe. Partialwellenzerlegung der ebenen Welle ..... 146  
52. Aufgabe. Partialwellenzerlegung der Streuamplitude ..... 148

53. Aufgabe. Definition des Streuquerschnitts .....	150
54. Aufgabe. Streuung an einem Potentialtopf .....	152
55. Aufgabe. Streuung an der harten Kugel .....	154
56. Aufgabe. Streuung am Potentialschacht .....	157
57. Aufgabe. Anomale Streuung .....	162
58. Aufgabe. Streuung an einer dünnwandigen Kugel .....	164
59. Aufgabe. Rutherford'sche Streuformel .....	166
60. Aufgabe. Partialwellenentwicklung der Rutherfordstreuung .....	170
61. Aufgabe. Anomale Coulomb-Streuung .....	174
62. Aufgabe. Integralgleichung .....	175
63. Aufgabe. Schwingersches Variationsprinzip .....	177
64. Aufgabe. Streulänge und effektive Reichweite .....	179
65. Aufgabe. Potentialschacht, Streulänge .....	183
66. Aufgabe. Streuung und gebundener Zustand .....	185
d) Elastische Streuung bei höheren Energien .....	187
67. Aufgabe. Bornsche Näherung .....	188
68. Aufgabe. Genäherte und exakte Streuamplitude .....	190
69. Aufgabe. Bornsche Näherung: Yukawa- und Coulombfeld .....	193
70. Aufgabe. Stoßparameter-Integral .....	195
71. Aufgabe. Strahlenoptik und Stoßparameterintegral .....	198
72. Aufgabe. Calogero-Gleichung .....	199
73. Aufgabe. Zweite Bornsche Näherung für Partialwellen .....	202
<i>V. Verschiedene Einkörperprobleme</i> .....	205
74. Aufgabe. Ionisiertes Wasserstoffmolekül .....	205
75. Aufgabe. Elektromagnetisches Feld .....	210
76. Aufgabe. Elektrische Stromdichte .....	212
77. Aufgabe. Normaler Zeemaneffekt .....	214
78. Aufgabe. Anregung durch eine Lichtwelle .....	215
<i>VI. Nichtstationäre Probleme</i> .....	221
Vorbemerkung .....	221
79. Aufgabe. Zwei Zustände: zeitunabhängige Störung .....	222
80. Aufgabe. Zwei Zustände: zeitabhängige Störung .....	224
81. Aufgabe. Paramagnetische Resonanz .....	226
82. Aufgabe. Photoanregung .....	227
83. Aufgabe. Elastische Streuung .....	230
84. Aufgabe. Photoeffekt .....	233
85. Aufgabe. Spontane Emission .....	236

<i>B. Mehrkörperprobleme</i> .....	241
<i>I. Spin</i> .....	244
Vorbemerkung .....	244
86. Aufgabe. Antikommutator .....	245
87. Aufgabe. Konstruktion der Paulimatrizen .....	246
88. Aufgabe. Eigenvektoren der Spinoperatoren .....	248
89. Aufgabe. Produkt der Spinoperatoren .....	249
90. Aufgabe. Spinortransformation .....	251
91. Aufgabe. Ebene Welle mit Spin .....	253
92. Aufgabe. Spinelektron im Zentralfeld .....	255
93. Aufgabe. Landéscher $g$ -Faktor .....	258
94. Aufgabe. Zwei Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$ .....	261
95. Aufgabe. Austauschkräfte .....	263
96. Aufgabe. Drei Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$ .....	264
 <i>II. Systeme aus wenigen Teilchen</i> .....	 268
Vorbemerkung .....	268
97. Aufgabe. Austauschentartung .....	268
98. Aufgabe. Gekoppelte Oszillatoren .....	270
99. Aufgabe. Helium im Grundzustand .....	276
100. Aufgabe. Neutrales Wasserstoffmolekül .....	279
101. Aufgabe. Schwerpunktsbewegung .....	283
102. Aufgabe. Drehimpulseigenfunktionen für zwei Teilchen .....	285
103. Aufgabe. Rutherford-Streuung gleicher Teilchen .....	287
104. Aufgabe. Unelastische Streuung .....	290
 <i>III. Systeme aus vielen Teilchen</i> .....	 294
105. Aufgabe. Metall als Elektronengas .....	294
106. Aufgabe. Paramagnetismus der Metalle .....	296
107. Aufgabe. Feldemission .....	299
108. Aufgabe. Thomas-Fermi-Atom .....	302
109. Aufgabe. Näherungen für die Thomas-Fermi-Funktion .....	305
110. Aufgabe. Abschirmung der K-Elektronen .....	309
 Literaturhinweise zu einigen Aufgaben .....	 312
Sachverzeichnis .....	315