Inhaltsverzeichnis

Synthetische Kontinuumsmechanik

1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik 3

2 Tensorrechnung 9
- 2.1 Vektoren 10
- 2.2 Koordinatensysteme 15
- 2.3 Tensoren 20
- 2.4 Tensoralgebra 25
- 2.5 Tensoranalysis 36
- 2.6 Doppeltensoren 43

3 Kinematische Größen 55
- 3.1 Konfiguration und Deformation 55
- 3.2 Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung 58
- 3.3 Deformation und Deformationsgradient 60
- 3.4 Verschiebung und Verschiebungsgradient 63
- 3.5 Verzerrung und Verzerrungsmaße 64
- 3.6 Kompatibilitätsbedingungen 70
- 3.7 Geschwindigkeitsgradient und Verzerrungsgeschwindigkeit . . 72
- 3.8 Starrkörperkinematik 76
- 3.9 Geometrische Linearisierung 77
- 3.10 Allgemeine Darstellung von Verzerrungstensoren 80

4 Kinetische Größen 83
- 4.1 Äußere Lasten 83
- 4.2 Cauchy-Spannungen 84
- 4.3 Piola-Kirchhoff-Spannungen 86

5 Bilanzgleichungen 89
- 5.1 Zustandsgrößen 89
- 5.2 Transporttheoreme 92
- 5.3 Allgemeine Bilanzgleichung 95
- 5.4 Massenbilanz 96
- 5.5 Impulsbilanz 97

5.6 Drehimpulsbilanz ... 100
5.7 Energiebilanz ... 106
5.8 Entropiebilanz ... 109
5.9 Bilanzen des thermomechanischen Problems ... 111
5.10 Konjugierte und duale Variable ... 113

6 Materialgleichungen ... 121
6.1 Allgemeine Form ... 122
6.2 Objektive Tensoren ... 124
6.3 Isotrope Funktionen ... 133
6.4 Materialklassen ... 134
6.5 Hyperelastisches Material ... 136
6.6 Lineare Elastizität ... 142
6.7 Finite Elastizität ... 145
6.8 Wärmeleitung ... 150
6.9 Thermoelastisches Material ... 155
6.10 Lineare Thermoelastizität ... 158
6.11 Finite Thermoelastizität ... 159

7 Grundgleichungen der linearen Thermoelastizität ... 163

Analytische Kontinuumsmechanik

8 Analytische und synthetische Kontinuumsmechanik ... 171

9 Grundlagen der Variationsrechnung ... 177
9.1 Funktionalanalysis ... 178
9.2 Notwendige Bedingungen für ein relatives Minimum ... 183
9.3 Euler-Lagrangesche Gleichung ... 188
9.4 Natürliche Randbedingungen ... 193
9.5 Der Lagrangesche δ-Prozeß ... 195
9.6 Aufgaben mit mehreren unbekannten Funktionen ... 199
9.7 Aufgaben mit mehreren unabhängigen Variablen ... 201
9.8 Aufgaben mit höheren Ableitungen ... 204
9.9 Aufgaben mit Nebenbedingungen ... 207

10 Das inverse Problem der Variationsrechnung ... 215
10.1 Potential eines Vektorfeldes ... 215
10.2 Funktional einer Differentialgleichung ... 216
10.3 Lineare Differentialgleichungen ... 220

11 Näherungslösungen auf der Basis von Prinzipen 223
11.1 Das Ritzsche Verfahren 223
11.2 Das Galerkinsche Verfahren 225
11.3 Die Methode der gewichteten Residuen 226

12 Die Prinzipe der Punktmechanik 231
12.1 Das Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung . 231
12.2 Das Prinzip von Hamilton 233
12.3 Probleme bei der Lagrangeschen Variation 235
12.4 Probleme mit nichtholonomen Nebenbedingungen 237

13 Variationelle Prinzipe der Kontinuumsmechanik 243
13.1 Das Prinzip der virtuellen Arbeit 245
13.2 Das Prinzip der virtuellen Temperatur 248
13.3 Ein thermomechanisches Prinzip 250

14 Variationsprinzipe der linearen Elastostatik 253
14.1 Formänderungsenergie und die Sätze von Clapeyron, Betti und Maxwell 255
14.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen 258
14.3 Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie 259
14.4 Erweitertes Prinzip vom Stationärwert der potentiellen Energie 262
14.5 Prinzip von Hu-Washizu 264
14.6 Prinzipe von de Veubeke und Hellinger-Reissner 266
14.7 Prinzip vom Minimum der komplementären Energie 270
14.8 Prinzip der virtuellen Kräfte 273
14.9 Ein Prinzip mit unabhängigen Randfeldern 273
14.10 Die Sätze von Castigliano und Menabrea 275

15 Variationsprinzipe der finiten Elastostatik 279
15.1 Prinzip vom Stationärwert der potentiellen Energie 279
15.2 Stabilität der Gleichgewichtslage 281
15.3 Abgeleitete Variationsprinzipe 282

16 Variationsprinzipe der Dynamik 285
16.1 Verallgemeinertes Prinzip von Kirchhoff-Hamilton 285
16.2 Prinzip von Kirchhoff-Hamilton für konservative Systeme ... 287
16.3 Ein Variationsprinzip für die Wärmeleitung 289
16.4 Ein Prinzip für den thermoelastischen Körper 291

Kontaktmechanik

17 Einführung in die Kontaktmechanik 295

18 Singuläre Flächen . . . 301
18.1 Kinematik . . . 301
18.2 Allgemeine Bilanzgleichung . . . 303
18.3 Bilanzgleichungen für das Volumen . . . 307
18.4 Bilanzgleichungen für die singuläre Fläche . . . 309

19 Synthetische Kontaktmechanik . . . 313
19.1 Kontaktkinematik . . . 313
19.2 Kontaktkinetik . . . 318
19.3 Formulierung der Kontaktbedingungen . . . 319
19.4 Kontaktbilanzen . . . 321

20 Konstitutive Kontaktgesetze . . . 325
20.1 Formulierung des Tangentialkontakts . . . 325
20.2 Allgemeine Form . . . 330
20.3 Objektivität der Kontaktgrößen . . . 331
20.4 Reibungsfreier Kontakt . . . 332
20.5 Reibungsbehafteter Kontakt . . . 336
20.6 Wärmeleitung . . . 339
20.7 Thermomechanischer Kontakt . . . 343

21 Analytische Kontaktmechanik . . . 347
21.1 Variation der kinematischen Größen . . . 347
21.2 Variationsungleichungen . . . 350
21.3 Active-Set-Strategie . . . 356
21.4 Lagrangesche Multiplikatoren . . . 360
21.5 Penalty-Methode . . . 364
21.6 Perturbed-Lagrange-Methode . . . 367
21.7 Augmented-Lagrange-Verfahren . . . 369
21.8 Formulierung für das thermomechanische Kontaktproblem . . . 372

Diskretisierungsverfahren und numerische Beispiele

22 Diskretisierungsverfahren . . . 377

23 Die Methode der finiten Elemente . . . 383
23.1 Diskretisierung des mechanischen Problems . . . 385
23.2 Diskretisierung des thermischen Problems . . . 390
23.3 Diskretisierung des thermomechanischen Problems . . . 393
23.4 Behandlung nichtlinearer Probleme . . . 398
23.5 Behandlung zeitabhängiger Probleme . . . 403
23.6 Lösung des linearen Gleichungssystems . . . 411
23.7 Fehleranalyse und adaptive Verfahren . . . 413

24 Inkrementierung des thermomechanischen Problems 417
24.1 Inkrementierung des dynamischen Problems 417
24.2 Inkrementierung des instationären Problems 421
24.3 Inkrementierung des stationären Problems 423

25 Linearisierung des thermomechanischen Problems 425
25.1 Linearisierung des mechanischen Problems 426
25.2 Linearisierung des thermischen Problems 428
25.3 Linearisierung des gekoppelten Problems 429
25.4 Linearisierung der Spannungen 433
25.5 Linearisierung konfigurationsabhängiger Lasten 439

26 Behandlung des Kontaktproblems 441
26.1 Linearisierung des mechanischen Kontakts 442
26.2 Linearisierung des Normalkontaktgesetzes 446
26.3 Linearisierung des Tangentialkontaktgesetzes 446
26.4 Linearisierung des thermischen Kontakts 450
26.5 Numerische Aspekte 452

27 Numerische Beispiele 455
27.1 Gough-Joule-Effekt 456
27.2 Thermoelastische Dämpfung 462
27.3 Große Deformationen infolge Wärmedehnung 467
27.4 Wärmefluß bei großen Verzerrungen 470
27.5 Hyperelastisches Materialverhalten 473
27.6 Statischer Kontakt bei kleinen Deformationen 476
27.7 Statischer Kontakt bei großen Deformationen 483
27.8 Dynamischer Kontakt bei großen Deformationen 488
27.9 Thermische Kontaktinstabilität 490
27.10 Wärmeentwicklung durch Reibung 497

Anhang

A Grundideen der konvexen Analysis 507
A.1 Mengen 507
A.2 Funktionen 509
A.3 Generalisierte Ableitung 510
A.4 Indikatorfunktion 511

B Ein axialsymmetrisches Membranelement 515
B.1 Kinematik 515
B.2 Materialgesetz 519
B.3 Schwache Form 521
B.4 Linearisierung 522

B.5 Algebraisierung 523

Literaturverzeichnis 527

Sachverzeichnis 553