

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Natürliche Zahlen und vollständige Induktion</b>	<b>1</b>
1.1	Vollständige Induktion .....	1
1.2	Fakultät und Binomialkoeffizienten .....	2
1.3	Aufgaben.....	5
<b>2</b>	<b>Reelle Zahlen</b>	<b>7</b>
2.1	Die Körperstruktur von $\mathbb{R}$ .....	7
2.2	Die Anordnung von $\mathbb{R}$ .....	8
2.3	Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ .....	10
2.4	$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar .....	16
2.5	Aufgaben.....	18
<b>3</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>20</b>
3.1	Der Körper der komplexen Zahlen .....	20
3.2	Die komplexe Zahlenebene .....	22
3.3	Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$ .....	24
3.4	Die Unmöglichkeit einer Anordnung von $\mathbb{C}$ .....	26
3.5	Aufgaben.....	26
<b>4</b>	<b>Funktionen</b>	<b>28</b>
4.1	Grundbegriffe .....	28
4.2	Polynome .....	32
4.3	Rationale Funktionen .....	35
4.4	Aufgaben.....	39
<b>5</b>	<b>Folgen</b>	<b>41</b>
5.1	Konvergenz von Folgen.....	41
5.2	Rechenregeln .....	43
5.3	Monotone Folgen .....	46
5.4	Eine Rekursionsfolge zur Berechnung von Quadratwurzeln....	48

5.5	Der Satz von Bolzano-Weierstraß .....	50
5.6	Das Konvergenzkriterium von Bolzano-Cauchy. Nochmals die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ .....	52
5.7	Uneigentliche Konvergenz .....	54
5.8	Aufgaben.....	56
<b>6</b>	<b>Reihen</b>	<b>59</b>
6.1	Konvergenz von Reihen .....	59
6.2	Konvergenzkriterien.....	61
6.3	Summierbare Familien .....	66
6.4	Potenzreihen .....	74
6.5	Aufgaben.....	77
<b>7</b>	<b>Stetige Funktionen. Grenzwerte</b>	<b>80</b>
7.1	Stetigkeit.....	80
7.2	Rechnen mit stetigen Funktionen .....	83
7.3	Erzeugung stetiger Funktionen durch normal konvergente Reihen .....	84
7.4	Stetige reelle Funktionen auf Intervallen. Der Zwischenwertsatz .....	86
7.5	Stetige Funktionen auf kompakten Mengen. Der Satz vom Maximum und Minimum .....	88
7.6	Anwendung: Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra .....	92
7.7	Stetige Fortsetzung. Grenzwerte von Funktionen .....	93
7.8	Einseitige Grenzwerte. Uneigentliche Grenzwerte .....	97
7.9	Aufgaben.....	100
<b>8</b>	<b>Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen</b>	<b>103</b>
8.1	Definition der Exponentialfunktion .....	103
8.2	Die Exponentialfunktion für reelle Argumente.....	107
8.3	Der natürliche Logarithmus .....	110
8.4	Exponentialfunktionen zu allgemeinen Basen. Allgemeine Potenzen .....	112
8.5	Binomialreihen und Logarithmusreihe .....	114
8.6	Definition der trigonometrischen Funktionen .....	117
8.7	Nullstellen und Periodizität .....	119
8.8	Die Arcus-Funktionen.....	122
8.9	Polarkoordinaten komplexer Zahlen.....	123
8.10	Geometrie der Exponentialabbildung. Hauptzweig des komplexen Logarithmus und des Arcustangens .....	125

Inhaltsverzeichnis	XI
8.11 Die Zahl $\pi$ .....	129
8.12 Die hyperbolischen Funktionen .....	131
8.13 Aufgaben.....	133
<b>9 Differentialrechnung</b>	<b>137</b>
9.1 Die Ableitung einer Funktion.....	137
9.2 Ableitungsregeln .....	141
9.3 Mittelwertsatz und Schrankensatz .....	144
9.4 Beispiele und Anwendungen .....	147
9.5 Reihen differenzierbarer Funktionen .....	152
9.6 Ableitungen höherer Ordnung .....	154
9.7 Konvexität .....	157
9.8 Konvexe Funktionen und Ungleichungen .....	160
9.9 Fast überall differenzierbare Funktionen. Verallgemeinerter Schrankensatz.....	163
9.10 Der Begriff der Stammfunktion .....	166
9.11 Eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige, nirgends differenzierbare Funktion ...	168
9.12 Aufgaben.....	169
<b>10 Lineare Differentialgleichungen</b>	<b>173</b>
10.1 Eindeutigkeitssatz und Dimensionsabschätzung .....	173
10.2 Ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung .....	176
10.3 Partikuläre Lösungen bei speziellen Inhomogenitäten .....	180
10.4 Anwendung auf Schwingungsprobleme .....	182
10.5 Partikuläre Lösungen bei allgemeinen Inhomogenitäten .....	185
10.6 Erweiterung des Lösungsbegriffes .....	187
10.7 Aufgaben.....	189
<b>11 Integralrechnung</b>	<b>191</b>
11.1 Treppenfunktionen und ihre Integration .....	191
11.2 Regelfunktionen .....	193
11.3 Integration der Regelfunktionen über kompakte Intervalle ....	196
11.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Stammfunktionen zu Regelfunktionen.....	199
11.5 Erste Anwendungen.....	206
11.6 Integration elementarer Funktionen .....	208
11.7 Integration normal konvergenter Reihen .....	214
11.8 Riemannsche Summen .....	216
11.9 Integration über nicht kompakte Intervalle.....	218
11.10 Die Eulersche Summationsformel .....	223
11.11 Aufgaben.....	229

<b>12</b>	<b>Geometrie differenzierbarer Kurven</b>	<b>233</b>
12.1	Parametrisierte Kurven. Grundbegriffe.....	233
12.2	Die Bogenlänge .....	238
12.3	Parameterwechsel .....	242
12.4	Krümmung ebener Kurven .....	243
12.5	Die Sektorfläche ebener Kurven .....	246
12.6	Kurven in Polarkoordinaten .....	249
12.7	Umfang und Windungszahlen .....	252
12.8	Noch ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra .....	255
12.9	Geometrie der Planetenbewegung. Die drei Keplerschen Gesetze .....	256
12.10	Aufgaben.....	258
<b>13</b>	<b>Elementar integrierbare Differentialgleichungen</b>	<b>262</b>
13.1	Wachstumsmodelle. Lineare und Bernoullische Gleichungen ...	262
13.2	Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen .....	266
13.3	Nicht-lineare Schwingungen. Die Differentialgleichung $\ddot{x} = f(x)$ .....	273
13.4	Aufgaben.....	279
<b>14</b>	<b>Lokale Approximation von Funktionen. Taylorpolynome und Taylorreihen</b>	<b>282</b>
14.1	Approximation durch Taylorpolynome .....	282
14.2	Taylorreihen. Rechnen mit Potenzreihen .....	286
14.3	Bernoulli-Zahlen und Cotangensreihe. Bernoulli-Polynome .....	289
14.4	Das Newton-Verfahren .....	292
14.5	Aufgaben.....	298
<b>15</b>	<b>Globale Approximation von Funktionen. Gleichmäßige Konvergenz</b>	<b>300</b>
15.1	Gleichmäßige Konvergenz .....	300
15.2	Vertauschungssätze .....	303
15.3	Kriterien für gleichmäßige Konvergenz .....	305
15.4	Anwendung: die Eulerschen Formeln für $\zeta(2n)$ .....	309
15.5	Approximation durch Faltung mit Dirac-Folgen .....	310
15.6	Lokal gleichmäßige Konvergenz. Der Überdeckungssatz von Heine-Borel .....	314
15.7	Der Approximationssatz von Stone .....	316
15.8	Aufgaben.....	319

Inhaltsverzeichnis	XIII
<b>16 Approximation periodischer Funktionen. Fourierreihen</b>	<b>321</b>
16.1 Der Approximationssatz von Fejér	321
16.2 Definition der Fourierreihen. Erste Beispiele und Anwendungen	325
16.3 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet	329
16.4 Ein Beispiel von Fejér	332
16.5 Die Besselsche Approximation periodischer Funktionen	334
16.6 Fourierreihen stückweise stetig differenzierbarer Funktionen	336
16.7 Konvergenz im quadratischen Mittel. Die Parsevalsche Gleichung	339
16.8 Anwendung: das isoperimetrische Problem	342
16.9 Wärmeleitung in einem Ring. Die Thetafunktion	343
16.10 Die Poissonsche Summenformel	347
16.11 Aufgaben	349
<b>17 Die Gammafunktion</b>	<b>351</b>
17.1 Die Gammafunktion nach Gauß	351
17.2 Der Eindeutigkeitssatz der Gammafunktion von Bohr und Mollerup. Die Eulersche Integraldarstellung	355
17.3 Die Stirlingsche Formel	357
17.4 Aufgaben	360
<b>Biographische Notiz zu Euler</b>	<b>361</b>
<b>Lösungen zu den Aufgaben</b>	<b>362</b>
<b>Literatur</b>	<b>403</b>
<b>Bezeichnungen</b>	<b>404</b>
<b>Namen- und Sachverzeichnis</b>	<b>406</b>