
Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine mathematische Begriffe und Schreibweisen	1
1.1	Logische Symbole	1
1.1.1	Bindewörter und Klammern	1
1.1.2	Hinweise zu Beweisen	3
1.1.3	Einige besondere Schreibweisen	3
1.1.4	Abschließende Anmerkungen	3
1.1.5	Übungen	4
1.2	Mengen und elementare Mengenoperationen	5
1.2.1	Der Begriff einer Menge	5
1.2.2	Teilmengen	7
1.2.3	Elementare Mengenoperationen	9
1.2.4	Übungen	11
1.3	Funktionen	12
1.3.1	Der Begriff einer Funktion (Abbildung)	12
1.3.2	Elementare Klassifizierung von Abbildungen	17
1.3.3	Zusammengesetzte Funktionen. Inverse Abbildungen	18
1.3.4	Funktionen als Relationen. Der Graph einer Funktion	20
1.3.5	Übungen	24
1.4	Ergänzungen	27
1.4.1	Die Mächtigkeit einer Menge (Kardinalzahlen)	27
1.4.2	Axiome der Mengenlehre	29
1.4.3	Sätze in der Sprache der Mengenlehre	31
1.4.4	Übungen	33
2	Die reellen Zahlen	37
2.1	Axiome und Eigenschaften der reellen Zahlen	38
2.1.1	Definition der Menge der reellen Zahlen	38
2.1.2	Algebraische Eigenschaften der reellen Zahlen	42
2.1.3	Das Vollständigkeitsaxiom. Die kleinste obere Schranke	46
2.2	Klassen reeller Zahlen und Berechnungen	49
2.2.1	Die natürlichen Zahlen. Mathematische Induktion	49

2.2.2	Rationale und irrationale Zahlen	52
2.2.3	Das archimedische Prinzip	55
2.2.4	Geometrische Interpretation. Gesichtspunkte beim Rechnen	57
2.2.5	Übungen und Aufgaben	70
2.3	Wichtige Sätze zur Vollständigkeit	74
2.3.1	Der Satz zur Intervallschachtelung	74
2.3.2	Der Satz zur endlichen Überdeckung	75
2.3.3	Der Satz vom Häufungspunkt	76
2.3.4	Übungen und Aufgaben	77
2.4	Abzählbare und überabzählbare Mengen	78
2.4.1	Abzählbare Mengen	78
2.4.2	Die Mächtigkeit des Kontinuums	80
2.4.3	Übungen und Aufgaben	81
3	Grenzwerte	83
3.1	Der Grenzwert einer Folge	84
3.1.1	Definitionen und Beispiele	84
3.1.2	Eigenschaften des Grenzwertes einer Folge	86
3.1.3	Existenz des Grenzwertes einer Folge	90
3.1.4	Elementares zu Reihen	99
3.1.5	Übungen und Aufgaben	109
3.2	Der Grenzwert einer Funktion	112
3.2.1	Definitionen und Beispiele	112
3.2.2	Eigenschaften des Grenzwertes einer Funktion	116
3.2.3	Grenzwert auf einer Basis	132
3.2.4	Existenz des Grenzwertes einer Funktion	137
3.2.5	Übungen und Aufgaben	153
4	Stetige Funktionen	157
4.1	Wichtige Definitionen und Beispiele	157
4.1.1	Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt	157
4.1.2	Unstetigkeitsstellen	162
4.2	Eigenschaften stetiger Funktionen	165
4.2.1	Lokale Eigenschaften	165
4.2.2	Globale Eigenschaften stetiger Funktionen	167
4.2.3	Übungen und Aufgaben	176
5	Differentialrechnung	181
5.1	Differenzierbare Funktionen	181
5.1.1	Problemstellung und einleitende Betrachtungen	181
5.1.2	In einem Punkt differenzierbare Funktionen	186
5.1.3	Tangenten und geometrische Interpretation der Ableitung	189
5.1.4	Die Rolle des Koordinatensystems	192

5.1.5	Einige Beispiele	194
5.1.6	Übungen und Aufgaben	200
5.2	Wichtige Ableitungsregeln	201
5.2.1	Differentiation und arithmetische Operationen	201
5.2.2	Differentiation einer verketteten Funktion (Kettenregel)	205
5.2.3	Differentiation einer inversen Funktion	208
5.2.4	Ableitungstabelle der Elementarfunktionen	213
5.2.5	Differentiation einer sehr einfachen impliziten Funktion	213
5.2.6	Ableitungen höherer Ordnung	218
5.2.7	Übungen und Aufgaben	222
5.3	Die zentralen Sätze der Differentialrechnung	223
5.3.1	Der Satz von Fermat und der Satz von Rolle	223
5.3.2	Der Mittelwertsatz und der Satz von Cauchy	225
5.3.3	Die Taylorsche Formeln	229
5.3.4	Übungen und Aufgaben	242
5.4	Differentialrechnung zur Untersuchung von Funktionen	246
5.4.1	Bedingungen für die Monotonie einer Funktion	246
5.4.2	Bedingungen für ein inneres Extremum einer Funktion	247
5.4.3	Bedingungen für die Konvexität einer Funktion	253
5.4.4	Die Regel von L'Hôpital	261
5.4.5	Das Konstruieren von Graphen von Funktionen	263
5.4.6	Übungen und Aufgaben	272
5.5	Komplexe Zahlen und Elementarfunktionen	276
5.5.1	Komplexe Zahlen	276
5.5.2	Konvergenz in \mathbb{C} und Reihen mit komplexen Gliedern	280
5.5.3	Eulersche Formel und Elementarfunktionen	285
5.5.4	Analytischer Zugang zur Potenzreihendarstellung	288
5.5.5	Algebraische Abgeschlossenheit des Körpers \mathbb{C}	293
5.5.6	Übungen und Aufgaben	300
5.6	Beispiele zur Differentialrechnung in den Naturwissenschaften	301
5.6.1	Bewegung eines Körpers mit veränderlicher Masse	302
5.6.2	Die barometrische Höhenformel	304
5.6.3	Radioaktiver Zerfall und Kernreaktoren	306
5.6.4	In der Atmosphäre fallende Körper	308
5.6.5	Die Zahl e und ein erneuter Blick auf $\exp x$	310
5.6.6	Schwingungen	313
5.6.7	Übungen und Aufgaben	316
5.7	Stammfunktionen	320
5.7.1	Stammfunktionen und das unbestimmte Integral	321
5.7.2	Allgemeine Methoden zur Bestimmung einer Stammfunktion	323
5.7.3	Stammfunktionen rationaler Funktionen	329
5.7.4	Stammfunktionen der Form $\int R(\cos x, \sin x) dx$	333
5.7.5	Stammfunktionen der Form $\int R(x, y(x)) dx$	335
5.7.6	Übungen und Aufgaben	338

6	Integralrechnung	345
6.1	Definition des Integrals	345
6.1.1	Problemstellung und einführende Betrachtungen	345
6.1.2	Definition des Riemannsches Integrals	347
6.1.3	Die Menge der integrierbaren Funktionen	349
6.1.4	Übungen und Aufgaben	363
6.2	Linearität, Additivität und Monotonie des Integrals	365
6.2.1	Das Integral als lineare Funktion auf dem Raum $\mathcal{R}[a, b]$	365
6.2.2	Das Integral als eine additive Intervallfunktion	365
6.2.3	Abschätzung, Monotonie und Mittelwertsatz	368
6.2.4	Übungen und Aufgaben	376
6.3	Das Integral und die Ableitung	377
6.3.1	Das Integral und die Stammfunktion	377
6.3.2	Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung	380
6.3.3	Partielle Integration und Taylorsche Formel	381
6.3.4	Änderung der Variablen in einem Integral	383
6.3.5	Einige Beispiele	385
6.3.6	Übungen und Aufgaben	390
6.4	Einige Anwendungen der Integralrechnung	393
6.4.1	Additive Intervallfunktionen und das Integral	393
6.4.2	Bogenlänge	395
6.4.3	Die Fläche eines krummlinigen Trapezes	402
6.4.4	Volumen eines Drehkörpers	404
6.4.5	Arbeit und Energie	404
6.4.6	Übungen und Aufgaben	411
6.5	Uneigentliche Integrale	413
6.5.1	Definition, Beispiele und wichtige Eigenschaften	413
6.5.2	Konvergenz eines uneigentlichen Integrals	418
6.5.3	Uneigentliche Integrale mit mehr als einer Singularität	425
6.5.4	Übungen und Aufgaben	428
7	Funktionen mehrerer Variabler	431
7.1	Der Raum \mathbb{R}^m und seine Unterräume	432
7.1.1	Die Menge \mathbb{R}^m und der Abstand in dieser Menge	432
7.1.2	Offene und abgeschlossene Mengen in \mathbb{R}^m	433
7.1.3	Kompakte Mengen in \mathbb{R}^m	436
7.1.4	Übungen und Aufgaben	438
7.2	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variabler	438
7.2.1	Der Grenzwert einer Funktion	438
7.2.2	Stetigkeit einer Funktion mehrerer Variabler	444
7.2.3	Übungen und Aufgaben	449

8	Differentialrechnung mit Funktionen mehrerer Variabler . . .	451
8.1	Die lineare Struktur auf \mathbb{R}^m	451
8.1.1	\mathbb{R}^m als Vektorraum	451
8.1.2	Lineare Transformationen $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$	452
8.1.3	Die Norm in \mathbb{R}^m	453
8.1.4	Die euklidische Struktur auf \mathbb{R}^m	455
8.2	Das Differential einer Funktion mehrerer Variabler	456
8.2.1	Differenzierbarkeit und das Differential in einem Punkt	456
8.2.2	Partielle Ableitung einer Funktion mit reellen Werten	457
8.2.3	Die Jacobimatrix in koordinatenweiser Darstellung	460
8.2.4	Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit in einem Punkt	461
8.3	Die wichtigsten Gesetze der Differentiation	462
8.3.1	Linearität der Ableitung	462
8.3.2	Ableitung verketteter Abbildungen (Kettenregel)	465
8.3.3	Ableitung einer inversen Abbildung	470
8.3.4	Übungen und Aufgaben	472
8.4	Reelle Funktionen mehrerer Variabler	478
8.4.1	Der Mittelwertsatz	478
8.4.2	Eine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit	480
8.4.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	481
8.4.4	Die Taylorsche Formel	484
8.4.5	Extrema von Funktionen mehrerer Variabler	486
8.4.6	Einige geometrische Darstellungen	493
8.4.7	Übungen und Aufgaben	497
8.5	Der Satz zur impliziten Funktion	504
8.5.1	Einleitung	504
8.5.2	Ein einfacher Satz zur impliziten Funktion	506
8.5.3	Übergang zur Gleichung $F(x^1, \dots, x^m, y) = 0$	510
8.5.4	Der Satz zur impliziten Funktion	513
8.5.5	Übungen und Aufgaben	518
8.6	Einige Korollare zum Satz zur impliziten Funktion	522
8.6.1	Der Satz zur inversen Funktion	522
8.6.2	Lokale Reduktion in kanonische Form	527
8.6.3	Funktionale Abhängigkeit	532
8.6.4	Lokale Zerlegung eines Diffeomorphismus	534
8.6.5	Das Morse-Lemma	537
8.6.6	Übungen und Aufgaben	540
8.7	Flächen in \mathbb{R}^n und bedingte Extrema	542
8.7.1	k -dimensionale Flächen in \mathbb{R}^n	542
8.7.2	Der Tangentialraum	547
8.7.3	Extrema mit Nebenbedingungen	552
8.7.4	Übungen und Aufgaben	565

Einige Aufgaben aus den Halbjahresprüfungen	571
1. Einführung der Analysis (Zahlen, Funktionen, Grenzwerte)	571
2. Differentialrechnung in einer Variablen	572
3. Integration und Einführung mehrerer Variabler	574
4. Differentialrechnung mehrerer Variabler	575
Prüfungsgebiete	579
1. Erstes Semester	579
1.1. Einleitung und Differentialrechnung in einer Variablen	579
2. Zweites Semester	581
2.1. Integration. Differentialrechnung mit mehreren Variablen .	581
Literaturverzeichnis	585
1. Klassische Werke	585
1.1 Hauptquellen	585
1.2 Wichtige umfassende grundlegende Werke	585
1.3 Klassische Vorlesungen in Analysis aus der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts	585
2. Lehrbücher	586
3. Studienunterlagen	586
4. Weiterführende Literatur	587
Sachverzeichnis	589
Namensverzeichnis	597