Table des matières

I Equations de la mécanique des fluides 1
1 Coordonnées lagrangiennes et eulériennes 2
2 Le théorème du transport 4
3 Les équations de bilan 7
3.1 Premières équations de conservation 7
3.2 Théorème de Cauchy - Tenseur des contraintes 10
3.3 Retour aux équations de conservation - Symétrie du tenseur des contraintes 15
4 Lois de constitution : Fluides newtoniens et lois thermodynamiques 18
4.1 Fluide au repos 18
4.2 Hypothèse de Newton. Tenseur des taux de déformations . 19
4.3 Conséquences du second principe de la thermodynamique. 24
4.4 Equation pour l'énergie interne spécifique 26
4.5 Formulation en entropie et en température 27
5 Récapitulatif des équations 28
6 Modèles incompressibles 30
6.1 Vocabulaire 30
6.2 Vue d'ensemble des modèles étudiés 31
6.3 Modèles adimensionnés 32
7 Quelques solutions stationnaires exactes des équations de Navier-Stokes 35
7.1 Cadre général 36
7.2 Ecoulement de Poiseuille dans une conduite 36
7.3 Ecoulement de cisaillement plan 38
7.4 Ecoulement de Couette entre deux cylindres 39
8 Commentaires bibliographiques 42

II Rappels d'analyse 43
1 Résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle 44
1.1 Espaces de Banach 44

1.2 Convergence faible, convergence faible-$*$ 46
1.3 Espaces $L^p(\Omega)$ 49
2 Résultats de compacité de base 57
2.1 Ensembles compacts 57
2.2 Applications compactes 59
2.3 Théorèmes de point fixe de Schauder 62
3 Espaces de Sobolev 63
3.1 Définitions 63
3.2 Dualité 64
3.3 Les espaces $H^{-m}(\Omega)$ 66
3.4 Injections de Sobolev 69
3.5 Théorème de produit 75
3.6 Inégalités de Poincaré 78
4 Fonctions d'une variable réelle 80
4.1 Dérivation et primitives 80
4.2 Inégalités différentielles et lemmes de Gronwall 83
5 Espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach 87
5.1 Définition et premières propriétés 87
5.2 Exemples fondamentaux 89
5.3 Dérivée faible en temps 90
5.4 Théorèmes de continuité 91
5.5 Théorèmes de compacité 97
5.6 Transformation de Fourier à valeurs dans un Banach 101

III Opérateurs gradient et divergence. Problème de Stokes . . . 107
1 Les champs de gradient 108
1.1 Cas de l'espace entier 110
1.2 Cas des demi-espaces 111
1.3 Cas des ouverts bornés lipschitziens 118
1.4 Inégalités de Poincaré dans $L^2(\Omega)$ et espace $L^2_0(\Omega)$ 120
1.5 Caractérisation des champs de gradient 123
2 Opérateur divergence 129
2.1 Champs de vecteurs à divergence L^2 129
2.2 Champs de vecteurs à divergence nulle - Décomposition de Leray 133
3 Problème de Stokes. Opérateur de Stokes 136
3.1 Rappels de théorie des opérateurs non-bornés 136
3.2 Application à l'opérateur de Stokes 143
3.3 Régularité elliptique de l'opérateur de Stokes et applications 148
4 Régularité du problème de Stokes 153
4.1 Problème de Stokes non-homogène 153
4.2 Premier cran de régularité 155
4.3 Régularité locale 155

4.4 Régularité au bord 162
4.5 Cas général du théorème de régularité 174
4.6 Théorie L^p du problème de Stokes 175
5 Problème de Stokes avec conditions aux limites en contrainte 177
5.1 Rappels sur l'opérateur de Laplace 178
5.2 Existence et unicité pour le problème de Stokes/Neumann 179
5.3 Propriétés de régularité 183
5.4 Conditions aux limites en contrainte 191

IV Equations de Navier-Stokes pour un fluide homogène 199
1 Le théorème de J. Leray 200
1.1 Terme d'inertie 200
1.2 Formulations faibles des équations de Navier-Stokes 202
1.3 Enoncé du théorème de Leray 206
1.4 Problème approché 207
1.5 Estimations d'énergie 209
1.6 Passage à la limite 211
1.7 Problème d'unicité 214
1.8 Globalité des solutions faibles 216
1.9 Evolution de l'énergie 217
1.10 Existence et régularité de la pression 222
2 Solutions fortes 223
2.1 Nouvelles estimations 225
2.2 Le cas de la dimension 2 226
2.3 Le cas de la dimension 3 229
2.4 Régularité à tous ordres pour les équations de Navier-Stokes 235
2.5 Régularisation en temps 241

V Conditions aux limites en sortie d'un écoulement 245
1 Mise en place du modèle 246
2 Le théorème d'existence et d'unicité 249
2.1 Théorème de trace précisé 249
2.2 Définition d'un problème approché 250
2.3 Inégalité de l'énergie 251
2.4 Estimations des dérivées fractionnaires en temps 253
2.5 Passage à la limite. Existence d'une solution faible 257
2.6 Unicité dans le cas $d = 2$ 259
2.7 Existence de la pression 261
3 Illustrations numériques 261

VI Conditions aux limites de Dirichlet par pénalisation - Couches limites 263
1 Un exemple simple de couche limite 265
1.1 Petit problème 1D 265
1.2 Calcul exact 266
2 Enoncé du résultat principal 270
3 Ansatz 273
3.1 Développement asymptotique formel 275
3.2 Equations satisfaites par les différents termes 279
4 Existence et régularité des termes du développement asymptotique 284
5 Estimation sur les termes de reste 290
5.1 Equations satisfaites par les restes 291
5.2 Estimation proprement dite 295

VII Fluides non homogènes 301
1 Résultats principaux 303
2 L'équation de transport 304
2.1 La méthode des caractéristiques 304
2.2 Solutions faibles 308
3 Problème approché pour les équations de Navier-Stokes non-homogènes 320
3.1 Définition du problème approché 321
3.2 Existence d'une solution du problème approché 321
3.3 Estimations *a priori* 329
4 Existence d'une solution faible 335
4.1 Convergences 335
4.2 Passage à la limite 337
4.3 Commentaires 339

A Opérateurs différentiels classiques 341
1 Cas scalaire et vectoriel 341
1.1 Définitions 341
1.2 Formulaire 343
2 Extension aux tenseurs d'ordre 2 343
3 Théorème de la divergence - Formules de Stokes 344

B Compléments de thermodynamique 347
1 Capacités calorifiques 347
2 Premier principe de la thermodynamique - Energie interne 348
3 Second principe de la thermodynamique 349
3.1 Entropie 349
3.2 Calcul de l'énergie interne 349
4 Variables spécifiques 350

C Géométrie des ouverts réguliers 353
1 Partitions de l'unité 354
2 Régularité des ouverts de $\mathbb{R}^d$ 357
2.1 Définition et caractérisations 357
2.2 Ouverts localement étoilés 359
3 Calcul sur le bord d'un ouvert régulier 362
3.1 Première forme fondamentale 363
3.2 Intégration et mesure sur Γ 364
3.3 Gradient sur Γ 365
3.4 Divergence sur Γ 367
3.5 Seconde forme fondamentale 368
3.6 Théorème de traces et de prolongement 371
4 Application au calcul dans Ω au voisinage de Γ 373
4.1 Paramétrage local de Ω près du bord 373
4.2 Fonction distance au bord et projection 375
4.3 Intégration près du bord 377
4.4 Gradient 379
4.5 Divergence 382
4.6 Laplacien 385
5 Caractérisation des espaces de Sobolev près du bord 385

Références 389

Index 397