
Table des matières

Partie I Mécanique céleste

1	Géométrie symplectique et transformations canoniques	3
1.1	Rappels d'algèbre extérieure et géométrie symplectique linéaire	3
1.2	Formes extérieures de degré 2 et géométrie symplectique linéaire	4
1.3	Groupe symplectique	5
1.3.1	Représentation du groupe	5
1.3.2	Groupe symplectique et champs de vecteurs Hamiltoniens linéaires	5
1.3.3	Notions d'algèbre linéaire symplectique	7
1.3.4	Stabilité et stabilité structurelle	10
1.4	Variétés symplectiques et champs de vecteurs Hamiltoniens . . .	11
1.4.1	Notations et définitions	11
1.4.2	Coordonnées de Darboux	13
1.4.3	Relèvement symplectique	14
1.5	Géométrie symplectique et calcul des variations	14
1.5.1	Formule fondamentale	15
1.5.2	Conditions de transversalité	15
1.5.3	Equations de Hamilton	16
1.5.4	Equation d'Hamilton-Jacobi	17
1.5.5	Le principe du maximum de Pontriaguine dans sa version faible	18
1.5.6	Transformations canoniques	21
1.6	Notes et sources	25
2	Quelques propriétés des équations différentielles Hamiltoniennes : intégrabilité et stabilité	27
2.1	Intégrabilité	27
2.1.1	Le théorème de redressement symplectique	27
2.1.2	Le théorème de Noether	28
2.1.3	La méthode d'intégration de Jacobi	29

2.1.4	Un théorème d'intégrabilité dans le cas linéaire non autonome	31
2.1.5	Le théorème d'intégrabilité de Liouville	32
2.2	Stabilité des états d'équilibre ; méthode directe de Liapunov	36
2.3	Le théorème de Lagrange-Dirichlet	40
2.4	Formes normales de Poincaré-Dulac	41
2.5	Forme normale d'un système Hamiltonien au voisinage d'un équilibre	43
2.6	Introduction à la théorie du KAM et à la stabilité des systèmes Hamiltoniens	45
2.6.1	Théorie de Floquet - Le cas Hamiltonien	45
2.6.2	Application premier retour de Poincaré - le cas Hamiltonien	46
2.6.3	Le cas de dimension 4 ; application à la stabilité	47
2.6.4	Théorème KAM isoénergétique	48
2.6.5	Théorème de stabilité d'Arnold	49
2.7	Le théorème de récurrence de Poincaré	49
2.8	Notes et sources	51
3	Introduction au problème des N corps ; les cas $N = 2$ et $N = 3$	53
3.1	Introduction au problème des N corps	53
3.2	Les intégrales premières classiques	54
3.2.1	Conservation de l'impulsion	54
3.2.2	Conservation du moment cinétique	55
3.2.3	Conservation de l'énergie cinétique, identité de Lagrange et inégalité de Sundman	55
3.3	Homogénéité et théorème de Viriel	56
3.4	Le problème de deux corps	58
3.4.1	Réduction au mouvement relatif	58
3.4.2	Réduction dans un référentiel lié au centre de masse	59
3.5	Mouvement dans un champ central	59
3.5.1	La loi des aires	60
3.5.2	Intégration des équations	60
3.6	Le problème de Kepler	62
3.6.1	Le cas elliptique	63
3.6.2	Le vocabulaire de la mécanique céleste	64
3.6.3	Equation de Kepler	64
3.7	Introduction au problème des 3 corps	64
3.8	Les travaux d'Euler, Lagrange dans le problème des 3 corps	65
3.9	La notion de configuration centrale	67
3.9.1	Solutions de Lagrange	69
3.9.2	Le théorème d'Euler-Moulton	70
3.9.3	Coordonnées de Jacobi pour le problème des 3 corps	70
3.9.4	Le problème circulaire restreint	71

3.10	Introduction aux problèmes des collisions	74
3.10.1	Etude des collisions totales	74
3.10.2	Présentation heuristique de la régularisation des collisions doubles dans le problème des 3 corps	75
3.11	Notes et sources	78
4	Recherche de trajectoires périodiques	79
4.1	Construction de trajectoires périodiques par la méthode de continuation	80
4.2	Le théorème du centre de Liapunov-Poincaré, dans le cas Hamiltonien	81
4.3	Application aux points de libration	82
4.4	Deux applications de la méthode de continuation en mécanique céleste	82
4.4.1	Orbites de Poincaré	82
4.4.2	Orbites de Hill	83
4.5	Solutions périodiques et principe de moindre action	85
4.6	Méthode directe en calcul des variations	85
4.6.1	Préliminaires	85
4.6.2	Equation d'Euler-Lagrange sur H^1	87
4.6.3	Fonctions semi-continues inférieurement et fonctions convexes	87
4.6.4	La notion de potentiel fort et l'existence de trajectoires périodiques pour le problème des deux corps.	89
4.6.5	Trajectoires périodiques pour le problème des N corps avec l'hypothèse du potentiel fort	91
4.6.6	Le cas Newtonien	91
4.7	Solution périodique du problème des trois corps de masse égale	92
4.7.1	Description de l'orbite en huit	92
4.7.2	Géométrie du problème et sphère topologique	93
4.7.3	Construction de la trajectoire en huit	95
4.7.4	Le concept de chorégraphie	97
4.8	Notes et sources	98

Partie II Contrôle des véhicules spatiaux

5	Contrôle d'attitude d'un satellite rigide	103
5.1	Contrôlabilité des systèmes avec des contrôles constants par morceaux	103
5.2	Contrôlabilité d'un satellite rigide gouverné par des rétro-fusées	107
5.2.1	Equations du mouvement	107
5.2.2	Le problème du choix de la représentation	109
5.2.3	Propriétés des trajectoires de la partie libre	111

5.2.4	Conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité du satellite rigide	113
5.3	Construction géométrique d'une loi de commande	115
5.4	Locale contrôlabilité	116
5.5	Contrôle d'attitude à l'aide de rotations successives	118
5.6	Notes et sources	120
6	Transfert orbital	121
6.1	Introduction	121
6.2	Modélisation du problème	122
6.3	Intégrale première de Laplace et intégration des équations de Kepler	122
6.4	Paramètres orbitaux	125
6.5	Décomposition de la poussée	125
6.6	Méthode de variation des constantes	126
6.7	Représentation du système dans les coordonnées équinoxiales	127
6.8	Coordonnées en rotation	129
6.9	Le problème de contrôlabilité	129
6.9.1	Préliminaires	129
6.9.2	La structure de l'algèbre de Lie du système	130
6.9.3	Les politiques de commande géométrique	132
6.10	Transfert d'orbite par la méthode de stabilisation	133
6.10.1	Ensemble ω -limite et théorème de stabilité de LaSalle	134
6.10.2	Stabilisation des systèmes non linéaires via le théorème de LaSalle : la méthode de Jurdjevic-Quinn	135
6.10.3	Démonstration de stabilité asymptotique locale de l'orbite (c_T, L_T) par la méthode de LaSalle	136
6.10.4	Stabilité globale	137
6.11	Le principe du maximum et les conditions de transversalité	137
6.12	Principe du maximum et problème sous-Riemannien avec dérive	139
6.12.1	Calcul générique des extrémales	139
6.12.2	Extrémales brisées et extrémales singulières	140
6.12.3	La H -singularité et son modèle nilpotent	140
6.12.4	Application à la dimension 4	142
6.13	Conditions d'optimalité du second ordre. Points conjugués et points focaux	148
6.13.1	Préliminaires	148
6.13.2	Application au transfert orbital plan	149
6.14	Notes et sources	150
7	Principe du maximum de Pontriaguine	153
7.1	Le principe du maximum de Pontriaguine	154
7.1.1	Enoncé	154
7.1.2	Preuve du principe du maximum	155
7.1.3	Généralisations du principe du maximum	165

7.2	Principe du maximum avec contraintes sur l'état	169
7.2.1	Les travaux de Weierstrass (1879)	169
7.2.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange et théorème de Kuhn-Tucker	174
7.2.3	Le cas affine et le principe du maximum de Maurer	183
7.2.4	Classification locale des synthèses temps minimales pour les problèmes avec contraintes	187
7.3	Notes et sources	195
8	Le contrôle de l'arc atmosphérique	197
8.1	Modélisation du problème de rentrée atmosphérique	197
8.1.1	Présentation du projet	197
8.1.2	Modélisation du problème	198
8.1.3	Les forces	200
8.1.4	Les équations du système	201
8.1.5	Coordonnées Kepleriennes	201
8.1.6	Le problème de contrôle optimal	203
8.1.7	Stratégie d'Harpold et Graves	204
8.1.8	Données numériques	204
8.1.9	La notion de trajectoire équilibrée	206
8.1.10	Réduction du problème, modèle simplifié en dimension trois	207
8.2	Contrôle optimal et stabilisation sur le modèle simplifié en dimension trois	208
8.2.1	Le problème sans contrainte	209
8.2.2	Le problème avec contrainte sur l'état	213
8.2.3	Stabilisation autour de la trajectoire nominale	214
8.3	Contrôle optimal du problème complet	220
8.3.1	Extrémales du problème non contraint	220
8.3.2	Construction d'une trajectoire quasi-optimale	224
8.4	Notes et sources	228
9	Méthodes numériques en contrôle optimal	229
9.1	Introduction	229
9.2	Méthodes du premier ordre : tir simple, tir multiple	230
9.2.1	Préliminaires	230
9.2.2	Méthode de tir simple	231
9.2.3	Méthode de tir multiple	232
9.2.4	Quelques remarques	235
9.2.5	Méthode de continuation	236
9.2.6	Application au problème du transfert orbital plan	239
9.2.7	Application au problème de rentrée atmosphérique	244
9.3	Méthodes du second ordre : théorie des points conjugués	247
9.3.1	Rappels sur les variétés Lagrangiennes - Equation de Jacobi	247

XIV	Table des matières	
	9.3.2	Méthodes de calcul des temps conjugués 249
	9.3.3	Temps conjugués en contrôle optimal 250
	9.3.4	Application au problème du transfert orbital 260
	9.3.5	Temps conjugués pour des systèmes de contrôle affines . 261
	Références 269
	Index 273