
Inhaltsverzeichnis

1	Ein-Perioden-Wertpapiermärkte	1
1.1	Portfolios	5
1.2	Optionen und Forward-Kontrakte	8
1.2.1	Optionen	8
1.2.2	Forward-Kontrakte	10
1.3	Die Bewertung von Auszahlungsprofilen	12
1.3.1	Die Transformation deterministischer Zahlungsströme	12
1.3.2	Die Transformation zustandsabhängiger Zahlungsströme	14
1.3.3	Die Bewertung von Auszahlungsprofilen mit Hilfe von Replikation	15
1.4	Replikation und Arbitrage	22
1.5	Der Fundamentalsatz der Preistheorie	31
1.5.1	Trennungssätze im \mathbb{R}^n	32
1.5.2	Interpretation von ψ als Zustandspreisvektor	39
1.5.3	Der Nachweis der Arbitragefreiheit	39
1.5.4	Das Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell	40
1.6	Replizierbarkeit und Vollständigkeit	44
1.7	Preise als diskontierte Erwartungswerte	47
1.7.1	Interpretation von d als Diskontfaktor	49
1.7.2	Interpretation von Q als Martingalmaß	51
1.7.3	Erwartungswert versus Diskontierung	52
1.8	Wertgrenzen für Call- und Put-Optionen	54
1.9	Das Auffinden von Arbitragegelegenheiten	56
1.10	Das diskontierte Marktmodell	58
1.10.1	Arbitragefreiheit und Gewinne	61
1.11	Zusammenfassung	68
1.12	Weitere Aufgaben	69
2	Portfoliotheorie	73
2.1	Rendite und Risiko	73
2.1.1	Die erwartete Rendite	74

2.1.2	Risiko, Varianz und Volatilität	74
2.1.3	Der rationale Investor	76
2.1.4	Das μ - σ -Diagramm	76
2.2	Portfolioanalyse	77
2.2.1	Rendite und erwartete Rendite eines Portfolios	77
2.2.2	Varianz und Standardabweichung eines Portfolios	80
2.2.3	Relative Risikobeiträge	83
2.2.4	Interpretation der Kovarianz	84
2.2.5	Die Korrelation	85
2.2.6	Diversifikation	87
2.2.7	Die klassische Darstellung des CAPM	91
2.3	Mean-Variance-Portfolio-Analyse	101
2.3.1	Die Zustandsdichte	102
2.3.2	Rendite und Risiko der Zustandsdichte	104
2.3.3	CAPM und das Mean-Variance-Optimierungsproblem	110
2.3.4	Die Bewertung von Auszahlungen mit Hilfe des CAPM	117
2.3.5	Anwendungsbeispiel für den Fall $\mathcal{L} \in \text{Im } D^\top$, $\mathcal{L} \neq 1$	117
2.3.6	Der Fall $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^K$ beliebig, $\mathcal{L} \neq 1$	119
2.3.7	Das Optimierungsproblem	131
2.4	Zusammenfassung	136
2.5	Weitere Aufgaben	141
3	Mehr-Perioden-Modelle	143
3.1	Modellierung der Informationszunahme	144
3.1.1	Informationsbäume,...	144
3.1.2	Algebren und Partitionen	149
3.2	Stochastische Prozesse und Meßbarkeit	153
3.2.1	Die natürliche Filtration	159
3.3	Das Marktmodell	164
3.4	Die Bewertung von Auszahlungsprofilen	169
3.4.1	Lokalisierung	171
3.4.2	Ein-Perioden-Teilmodelle	171
3.4.3	Konstruktion einer replizierenden Handelsstrategie	172
3.4.4	Arbitragefreiheit und der Fundamentalsatz	177
3.4.5	Die Bewertung deterministischer Zahlungsströme	181
3.4.6	Die Bewertung zustandsabhängiger Zahlungsströme	183
3.4.7	Die Bestimmung von Zustandsprozessen	186
3.5	Der Diskontierungsoperator	192
3.5.1	Definition und Eigenschaften	192
3.5.2	Direktes und rekursives Verfahren zur Bestimmung der Preise von Auszahlungsprofilen	199
3.5.3	Darstellung der Preise als Erwartungswerte	202
3.5.4	Festverzinsliche Handelsstrategien	203
3.5.5	Der Diskontierungsoperator wird zur bedingten Erwartung	209

3.5.6	Preisprozesse werden zu Martingalen	211
3.6	Das diskontierte Marktmodell	212
3.7	Wertgrenzen für Call- und Put-Optionen	218
3.8	Zusammenfassung	220
3.9	Weitere Aufgaben	226
4	Optionen, Futures und andere Derivate	229
4.1	Das Mehr-Perioden-Binomialbaum-Modell	229
4.2	Rekombinierende Binomialbäume	233
4.3	Kalibrierung der Parameter des Binomialbaums	237
4.3.1	Bestimmung des Zinssatzes r_n pro Periode	238
4.3.2	Die Modellierung der Aktienkurse	239
4.3.3	Binomialbäume und Binomialverteilung	242
4.3.4	Die Bestimmung der Parameter u_n und p_n	244
4.3.5	Näherungslösungen für u_n und p_n	246
4.4	Die Bewertung europäischer Standard-Derivate	248
4.4.1	Das direkte Bewertungsverfahren	249
4.4.2	Die Implementierung des direkten Verfahrens	251
4.4.3	Das rekursive Bewertungsverfahren	254
4.4.4	Die Implementierung des rekursiven Verfahrens	255
4.5	Die Berücksichtigung von Dividendenzahlungen	256
4.5.1	Die Modellierung von Aktienkursen mit Dividendenzahlungen	256
4.5.2	Die Bewertung im Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell	260
4.5.3	Dividenden im Mehr-Perioden-Modell	263
4.5.4	Algorithmen zur Bewertung europäischer Auszahlungen mit Dividenden	268
4.6	Amerikanische Optionen	270
4.6.1	Die Bewertung amerikanischer Optionen ohne Dividendenzahlungen	270
4.6.2	Ein Algorithmus zur Berechnung amerikanischer Auszahlungen ohne Dividendenzahlung	274
4.7	Amerikanische Optionen mit Dividendenzahlungen	276
4.7.1	Ein Algorithmus zur Berechnung von amerikanischen Optionen mit Dividendenzahlung	276
4.8	Die Black-Scholes-Formeln	278
4.8.1	Bewertungsformeln im Binomialbaum-Modell	278
4.8.2	Die Konvergenz der Bewertungsformel	281
4.8.3	Die analytische Bewertung von Standard-Optionen im Black-Scholes-Modell	284
4.8.4	Implementierung der Black-Scholes-Formeln	285
4.9	Present Value und die Bewertung von Cash-Flows	291
4.10	Swaps	294
4.11	Forward-Preise	294
4.12	Futures	297

4.13	Forward-Start-Optionen	304
4.14	Forward-Start-Performance-Optionen	305
4.15	Ein strukturiertes Produkt	306
4.16	Zusammenfassung	308
4.17	Weitere Aufgaben	310
5	Risikomanagement	311
5.1	Value at Risk	311
5.1.1	Darstellung des Value at Risk mit Hilfe der Renditeverteilung eines Portfolios	313
5.1.2	Normalverteilte Portfoliorenditen	313
5.1.3	Zeitliche Skalierung	315
5.2	Die Delta-Normal-Methode	318
5.2.1	Die Portfoliorendite als Linearkombination normalverteilter Renditen	318
5.2.2	Die Delta-Normal-Methode	322
5.2.3	Berechnung der modifizierten Sensitivitäten	325
5.3	Component VaR	331
5.4	Directional VaR	332
5.5	Diskussion: Value at Risk als Risikomaß	333
5.6	Zusammenfassung	336
5.7	Weitere Aufgaben	338
6	Diskrete Stochastische Analysis	339
6.1	Bedingte Erwartung und Martingale	339
6.1.1	Die Bedingte Erwartung als Projektion	345
6.1.2	Unabhängigkeit	349
6.1.3	Martingale	350
6.2	Die Doob-Zerlegung	352
6.3	Kovariations-Prozesse	355
6.4	Orthogonale Martingale	359
6.5	Das diskrete stochastische Integral	360
6.6	Stochastische Integrale und Kovariations-Prozesse	361
6.7	Die Itô-Formel	364
6.8	Stochastische Exponentiale	364
6.9	Der Satz von Girsanov	367
6.9.1	Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte	367
6.9.2	Der Satz von Girsanov	369
6.10	Stopzeiten	371
6.11	Zusammenfassung	375
6.12	Weitere Aufgaben	376

7	Diskrete Stochastische Finanzmathematik	377
7.1	Das Binomialbaum-Modell	377
7.1.1	Schritt 1: Konstruktion eines Martingalmaßes	378
7.1.2	Schritt 2: Definition des Preises von c_T als Erwartungswert	386
7.1.3	Schritt 3: Konstruktion einer die Endauszahlung c_T replizierenden selbstfinanzierenden Handelsstrategie	386
7.2	Die Binomialbaum-Formeln	388
7.3	Die Black-Scholes-Formeln	391
7.4	Amerikanische Optionen	395
7.5	Zusammenfassung	398
7.6	Aufgaben	399
8	Mathematische Grundlagen	401
8.1	Vektorräume	401
8.2	Skalarprodukt und Norm	402
8.3	Die Schwarzsche Ungleichung	404
8.3.1	Der Satz des Pythagoras	404
8.3.2	Die Projektion	405
8.3.3	Die Schwarzsche Ungleichung	407
8.3.4	Definition von Winkeln	408
8.3.5	Grenzfälle	408
8.4	Basen, Orthonormalbasen und der Projektionssatz	409
8.5	Quotientenräume	412
8.6	Lineare Abbildungen	414
8.7	Der Rieszsche Darstellungssatz	420
8.8	Adjungierte Abbildungen	421
8.9	Lineare Optimierung	424
8.10	Landau-Symbole	425
8.11	Lagrange-Multiplikatoren	426
8.12	Der Satz von De Moivre-Laplace	428
9	Lösungen der Aufgaben	431
9.1	Ein-Perioden-Modelle	431
9.2	Portfoliotheorie	442
9.3	Mehr-Perioden-Modelle	456
9.4	Optionen, Futures und andere Derivate	472
9.5	Risikomanagement	476
9.6	Diskrete Stochastische Analysis	480
9.7	Diskrete Stochastische Finanzmathematik	488
	Literaturverzeichnis	493
	Sachverzeichnis	495