

Leseprobe

Martin Nitschke

Geometrie

Anwendungsbezogene Grundlagen und Beispiele für Ingenieure

ISBN (Buch): 978-3-446-44143-9

ISBN (E-Book): 978-3-446-44173-6

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44143-9>

sowie im Buchhandel.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	9
1	Anknüpfung an die Schulgeometrie	10
1.1	Dreiecke, Vierecke, Vielecke	10
1.2	Kongruenz, Ähnlichkeit, Strahlensätze	17
1.3	Umfangs- und Flächeninhaltsberechnungen	24
1.4	Einige Sätze über Dreiecke und Winkel	33
1.5	Körper	40
1.5.1	Quader, Zylinder, Prismen	41
1.5.2	Pyramiden und Kegel	43
1.5.3	Rotations- und Translationsflächen und -körper	44
1.5.4	Allgemeinere Körper	49
1.5.5	Polyeder	52
2	Matrizen, Vektoren, Koordinaten	54
2.1	Grundlagen aus der Linearen Algebra	54
2.2	Länge und Winkel	62
2.3	Orthogonale Zerlegung von Vektoren	66
2.4	Koordinatensysteme und -transformationen	68
2.4.1	Kartesische Koordinaten	68
2.4.2	Krummlinige Koordinaten	73
2.5	Determinante, Kreuzprodukt, Orientierung	84
2.5.1	Determinante (2d)	84
2.5.2	Kreuzprodukt und Determinante (3d)	88
2.6	Lineare Transformationen und homogene Koordinaten	93
2.6.1	Drehungen und allgemeinere lineare Transformationen	93
2.6.2	Homogene Koordinaten	103

3	Kurven, Flächen, Körper	106
3.1	Kurven	106
3.1.1	Parameterdarstellungen und Kurvenlängen	106
3.1.2	Gleichungsdarstellungen ebener Kurven	114
3.1.3	Funktionskurven	118
3.1.4	Kegelschnitte (Kurven zweiter Ordnung)	118
3.2	Flächen und Körper	122
3.2.1	Parameterdarstellungen, Flächeninhalte, Volumina	122
3.2.2	Gleichungsdarstellungen	129
3.2.3	Flächen zweiter Ordnung	129
3.3	Abstände und Schnitte	132
3.3.1	Abstand eines Punktes von einer Kurve oder Fläche	132
3.3.2	Abstände von Kurven und Flächen untereinander	135
3.3.3	Schnitte	139
4	Projektionen und Grundaufgaben der darstellenden Geometrie	146
4.1	Projektionen	146
4.2	Grundaufgaben	150
4.3	Begriffe und Beispiele zu ausgewählten Projektionen	150
4.3.1	Kotierte Projektion	150
4.3.2	Orthogonale Zweitafelprojektion	153
4.3.3	Umkloppung und wahre Gestalt ebener Figuren	155
4.3.4	Axonometrie	157
	Lösungen in Kurzform	162
	Verzeichnisse	171
	Literatur und Internet	171
	Personen	174
	MATLAB-Programme	175
	Index	176

Vorwort

In so gut wie allen technischen Studiengängen hat die Geometrie ihren Platz; sei es als eigenes Fach, als Teil des Mathematikurses oder versteckt in anderen Lehrveranstaltungen. Daran ändert auch die zunehmende Leistungsfähigkeit und Verfügbarkeit ausgefeilter CAD-Systeme nichts; CAD ist kein Ersatz, sondern häufig ein Werkzeug und manchmal eine Weiterentwicklung der klassischen Geometrie. Ähnlich wie in den Grundschulen weiterhin das Schreiben mit der Hand unterrichtet wird (obwohl es Textverarbeitungsprogramme gibt), ist die Geometrie Bestandteil jeder Ingenieurausbildung. Der souveräne Umgang mit CAD setzt ein umfangreiches geometrisches Grundwissen voraus. Da dieses nur bei wenigen Studienanfängern vorhanden ist, beginnt die vorliegende Studienhilfe mit einer Auffrischung (bzw. Einführung) einiger Zusammenhänge aus der Schulgeometrie. Danach werden als wesentliches Hilfsmittel zur analytischen Beschreibung Vektoren und Matrizen eingeführt. Damit und mit etwas Analysis lassen sich Kurven, Flächen und Körper darstellen sowie Bogenlängen, Flächeninhalte, Volumina, Abstände und Schnitte berechnen. Abschließend werden einige Grundaufgaben und Projektionen der darstellenden Geometrie behandelt.

Das Buch kann in der vorgegebenen Reihenfolge durchgearbeitet werden. In vielen Fällen wird zum Verständnis ein Zurückblättern erforderlich sein; auf die entsprechende Stelle wird dann durch eine Formel-, Satz-, Bild- oder Aufgabennummer verwiesen. Literatur- und Internethinweise auf tiefer gehende und/oder weiterführende Betrachtungen sind in eckige Klammern [] gesetzt und im Literatur- und Internetverzeichnis spezifiziert. Die vorliegende zweite Auflage enthält neben Korrekturen insbesondere ein aktualisiertes Internetverzeichnis. Alle zitierten Webseiten wurden mit dem Dienst WebCite® archiviert, so dass diese zeitlich unbegrenzt auch bei nachträglichen Änderungen und Löschungen in der Fassung von Mai 2014 abgerufen werden können.

Bei der Erstellung des Buches wurden das Satzsystem \LaTeX^1 und das mathematische Softwaresystem MATLAB² eingesetzt. Sämtliche Bilder wurden mit MATLAB erstellt; die Quelltexte sind im Internet verfügbar. Für Beispiele mit geographischem Bezug wurde zur Darstellung der Kontinentkonturen das frei verfügbare, weltumspannende digitale Höhenmodell [tbase.bin WWW] benutzt.

Diese Studienhilfe basiert auf meinen Lehrveranstaltungen an der Hochschule Neubrandenburg. Nicht zuletzt durch die konstruktive Kritik der

¹Näheres zu \LaTeX unter [DANTE WWW].


²MATLAB® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks Inc.

Studierenden konnte so manche Ungereimtheit beseitigt werden; herzlichen Dank dafür! Weitere Hinweise und Verbesserungsvorschläge aus dem Leserkreis sind selbstverständlich willkommen; meine E-Mail-Adresse und zusätzliche Informationen zum Buch finden Sie auf der Internetseite GEOMETRIE.HS-NB.DE. Ich danke KATI BLAUDZUN und ANDREAS WEHRENPENNIG für die mühevollen Arbeit des Korrekturlesens, Frau FRITZSCH für die angenehme und aufmerksame Zusammenarbeit. Ebenso danke ich Herrn ENGELMANN für die Aufnahme in diese Reihe und viele fachliche Hinweise.

Neubrandenburg, im Mai 2014

Martin Nitschke

Symbole und Schriftarten

 **An diesen Stellen** ist der Leser eingeladen, zum Stift zu greifen und eine Aufgabe zu lösen. Aufgaben sind grundsätzlich in unmittelbarer Nähe zur Behandlung des jeweiligen Stoffes eingefügt. Dies ermöglicht eine sofortige Verständnisüberprüfung. Am Ende des Buches sind die Lösungen der Aufgaben in Kurzform zusammengestellt; eine ausführlichere Fassung steht auf GEOMETRIE.HS-NB.DE.

➤ Französische Anführungszeichen markieren mit MATLAB programmierte Beispiele. MATLAB-Schlüsselwörter wie **function** sind fett gedruckt, die Namen vordefinierter Funktionen, wie zum Beispiel **sin**, zusätzlich unterstrichen. Funktionen aus der Symbolic Math Toolbox wie syms sind doppelt unterstrichen. Kommentare werden durch ein %-Zeichen eingeleitet und sind hier in Grau gesetzt. Antworten des MATLAB-Systems sind durch Schreibmaschinenschrift hervorgehoben. Die vollständige MATLAB-Dokumentation, also insbesondere die Beschreibung der vordefinierten Funktionen, ist sowohl in das MATLAB-System integriert als auch über [MATLAB helpdesk WWW] zugänglich. Eine gute Einführung in MATLAB und eine Übersicht über frei verfügbare Software zur Linearen Algebra sind auf [GRAMLICH WWW] zu finden. In den Programm-Beispielen dieser Studienhilfe werden MATLAB-Kenntnisse etwa im Umfang der [GRAMLICH WWW]-Einführung vorausgesetzt. Die MATLAB-Beispiele sollen die Umsetzung des Gelernten in Computerprogramme unterstützen; MATLAB- oder andere EDV-Kenntnisse sind jedoch keine Voraussetzung für das Verständnis dieses Buches. Weiteres zu MATLAB und ähnlichen Produkten ist in Abschnitt 2.1 zu finden.

◆ Das MATLAB-Logo und eine kleinere Schrift verweisen auf die MATLAB-Datei, die zum jeweiligen Bild oder Programm-Listing gehört. Der unter GEOMETRIE.HS-NB.DE abrufbare Quelltext ermöglicht Lesern mit MATLAB-Zugang, das Bild bzw. Programm zu reproduzieren und/oder für den jeweiligen Zweck (Konstruktionsvorlage, Vortragsfolie usw.) zu modifizieren.

(D1) Der Betrag der Determinante ist das Volumen des von \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannten Parallelepats:

$$|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{2.167}$$

(D2) Sind $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *rechtshändig* (also wie in Bild 2.28) orientiert, so ist die Determinante positiv; sonst negativ.

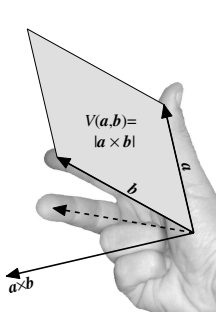


Bild 2.27:
Kreuzprodukt
◆ Kreuzprodukt.m

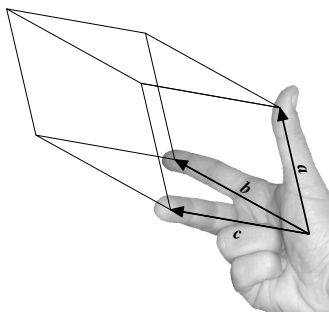


Bild 2.28: Determinante (3d)
◆ det3d.m

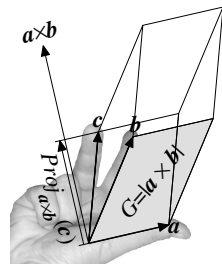


Bild 2.29: Volumen
des Parallelepats
◆ Parallelep.m

Da ein Parallelepiped ein spezielles Prisma ist, ist sein Volumen durch die Formel (1.104) gegeben. Ist die Grundfläche das von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannte Parallelogramm, so definiert nach (K2) das Kreuzprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ eine zur Grundfläche senkrechte Richtung, und die Höhe des Parallelepats ist die Länge der Projektion von \mathbf{c} auf $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Nach (K1) ist der Inhalt der Grundfläche gleich $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Insgesamt gilt also

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{(1.104) \text{ und Bild 2.29}}{=} \overset{\text{Grundfläche}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \overset{\text{Höhe}}{|Proj_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}(\mathbf{c})|} \tag{2.168}$$

$$\stackrel{(2.55)}{=} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot ((\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot \mathbf{c})| \tag{2.169}$$

$$\stackrel{(2.32)}{=} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \underbrace{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0|}_{=1} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot \mathbf{c}| \stackrel{(2.32)}{=} \left| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| ((\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 \cdot \mathbf{c}) \right| \tag{2.170}$$

$$\stackrel{(2.19)}{=} \left| (|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0) \cdot \mathbf{c} \right| \stackrel{(2.12)}{=} \left| (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \right|. \tag{2.171}$$

Sind wie in Bild 2.29 die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ rechtshändig orientiert, so spannen $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ und \mathbf{c} einen spitzen Winkel auf, und das Skalarprodukt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

ist nach Satz 2.2 positiv. Entsprechend ergeben sich bei nicht rechtshändiger Orientierung ein stumpfer Winkel und ein negatives Skalarprodukt. Deshalb folgt aus (D1), (D2) und (2.171)

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}; \quad (2.172)$$

die Determinante von drei 3d-Vektoren lässt sich also auf die Berechnung von Skalar- und Kreuzprodukt zurückführen. Die Determinante einer 3×3 -Matrix ist als die Determinante ihrer Spaltenvektoren definiert:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}. \quad (2.173)$$

» Die für 2×2 -Matrizen bereits behandelte MATLAB-Anweisung **det(A)** steht für beliebige $n \times n$ -Matrizen, also auch für 3×3 -Matrizen, zur Verfügung. Bei Determinanten von drei dreidimensionalen Spaltenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ist — wie im Zweidimensionalen — zunächst eine Matrix zu bilden und dann die Determinante zu berechnen: **det([a,b,c])**.

Die Berechnung der Determinante dreier Vektoren mittels Koordinaten wird in (2.201) behandelt. Ohne zu rechnen, ergeben sich aus geometrischen Überlegungen die folgenden Eigenschaften von Kreuz- und Spatprodukt:

Sind $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2$ dreidimensionale Spaltenvektoren und λ ein Skalar, so gilt:

1. Antikommutativgesetz

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (2.174)$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\det(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}). \quad (2.175)$$

2. Kommutativgesetz für zyklische Vertauschung

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \det(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (2.176)$$

3. Linearitätsgesetze

a) Additivitätsgesetze

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}, \quad (2.177)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2. \quad (2.178)$$

$$\det(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (2.179)$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}), \quad (2.180)$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2). \quad (2.181)$$

b) **Skalare Multiplikativitätsgesetze**

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \tag{2.182}$$

$$\det(\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda \mathbf{c}) = \lambda \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{2.183}$$

4. a) **Parallelitätskriterium:** \mathbf{a} und \mathbf{b} sind genau dann **parallel**, wenn $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$ ist. Insbesondere ist

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{o}. \tag{2.184}$$

b) **Komplanaritätskriterium:** $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sind genau dann **komplanar**, d.h. in einer Ebene liegend, wenn $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ ist; insbesondere

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0. \tag{2.185}$$

5. Für die Koordinateneinheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und \mathbf{e}_3 aus (2.62) gilt

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \tag{2.186} \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \tag{2.189}$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \tag{2.187} \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \tag{2.190}$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \tag{2.188} \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2, \tag{2.191}$$

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1, \tag{2.192}$$

$$\det(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = -1. \tag{2.193}$$

Aus diesen Eigenschaften folgen nun Formeln für die Berechnung des Kreuzprodukts und der Determinante mittels Koordinaten. Für beliebige dreidimensionale Spaltenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gilt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \stackrel{(2.63)}{=} (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \times (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \tag{2.194}$$

$$\stackrel{(2.177), (2.178)}{=} a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$$

$$+ a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$$

$$\stackrel{(2.184)}{=} + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \tag{2.195}$$

$$\stackrel{(2.186)-(2.191)}{=} (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3$$

$$\tag{2.196}$$

$$\stackrel{(2.63)}{=} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\tag{2.197}$$

Durch eine etwas längere Rechnung folgt daraus der **Entwicklungssatz von Hermann Günter Grassmann (1809–1877)**:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}. \tag{2.198}$$

Für die Determinante gilt nun $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{(2.172),(2.197)}{=} \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}$

$$\stackrel{(2.4)}{=} (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3 \quad (2.199)$$

$$= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 \quad (2.200)$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 . \quad (2.201)$$

Auf PIERRE FRÉDÉRIC SARRUS (1798–1861) geht die folgende Merkmregel für (2.201) zurück:

Man schreibe die Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} spaltenweise nebeneinander und füge

rechts daneben noch einmal die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} an: $\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix}$.

Die Determinante ist dann die Summe der Produkte in Richtung der Diagonalen von links oben nach rechts unten vermindert um die Summe der Produkte in Richtung der Diagonalen von links unten nach rechts oben.

Beispiel 2.5

Es ist $\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ zu berechnen.

Lösung: Das Schema $\begin{matrix} -1 & 4 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -9 & 3 & 6 \end{matrix}$ ergibt $\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-5) \cdot (-9) - (-9) + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-5) \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot (-1) - (-9) \cdot 2 \cdot 4 = 360$. ■

Eine Anwendung der Determinanten ist die folgende, zum Beispiel in [FISCHER 2002] bewiesene, auf GABRIEL CRAMER (1704–1752) zurückgehende Regel.

Satz 2.7 (Cramersche Regel)

Sind \mathbf{A} eine 2×2 - bzw. 3×3 -Matrix, \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 sowie ggf. \mathbf{a}_3 die Spaltenvektoren von \mathbf{A} und \mathbf{b} ein weiterer 2×1 - bzw. 3×1 -Vektor, und ist das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eindeutig lösbar,

$$\text{so ist } x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2)}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b})}{\det \mathbf{A}}$$

$$\text{bzw. } x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3)}{\det \mathbf{A}}, \quad x_3 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{\det \mathbf{A}}.$$

Bemerkung: Die CRAMERSche Regel gilt allgemeiner für eindeutig lösbare, lineare $n \times n$ -Gleichungssysteme. Während sie bei 2×2 - und 3×3 -Systemen ein

praktisches Verfahren für die manuelle Rechnung liefert, ist sie zur numerischen Lösung größerer Systeme wegen des im Allgemeinen hohen Aufwandes nicht geeignet.

Aufgabe 2.15

Berechnen Sie die folgenden Kreuzprodukte und Determinanten:

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$,
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$,
4. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,
5. $\det \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1,2,3}$.

2.6 Lineare Transformationen und homogene Koordinaten

2.6.1 Drehungen und allgemeinere lineare Transformationen

Gegeben sind ein 2d-Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und ein Winkel α ; gesucht ist der Vektor $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, der durch Drehung von \mathbf{v} um den Winkel α entsteht. Geeignete Koordinaten zur Lösung dieser Aufgabe sind die aus Abschnitt 2.4.2ff bekannten Polarkoordinaten. Nach (2.95) und (2.96) ist dann

$$\mathbf{v} = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \tag{2.202}$$

und

$$\mathbf{w} \stackrel{\text{Bild 2.30}}{=} r \begin{pmatrix} \cos(t + \alpha) \\ \sin(t + \alpha) \end{pmatrix} \stackrel{\text{Additions-theoreme}}{=} r \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos t - \sin \alpha \sin t \\ \sin \alpha \cos t + \cos \alpha \sin t \end{pmatrix} \tag{2.203}$$

$$\stackrel{(2.202)}{=} \begin{pmatrix} (\cos \alpha)v_1 - (\sin \alpha)v_2 \\ (\sin \alpha)v_1 + (\cos \alpha)v_2 \end{pmatrix} \stackrel{(2.2)}{=} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mathbf{v}. \tag{2.204}$$

Es gilt also

Satz 2.8

Ein 2d-Vektor wird um einen gegebenen Winkel α gedreht, indem man ihn mit der so genannten **Drehmatrix** $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ von links multipliziert.

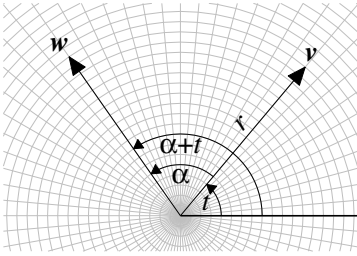


Bild 2.30: Drehung eines Vektors (2d) ◆ Drehung2d.m

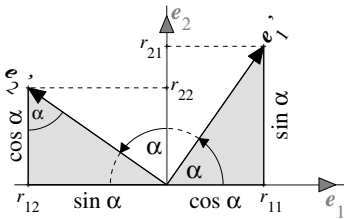


Bild 2.31: Drehmatrix und Richtungskosinus (2d) ◆ Drehmatrix2d.m

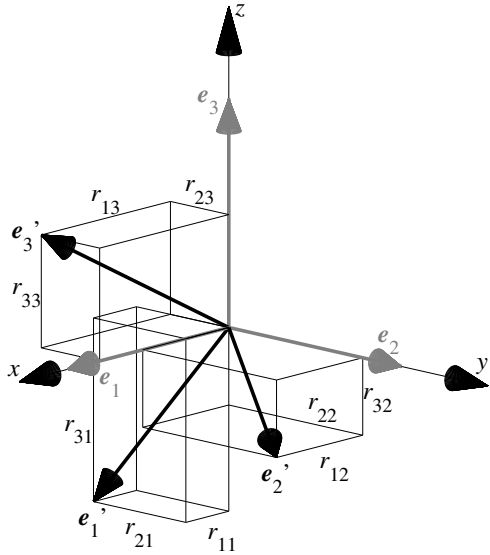


Bild 2.32: Drehmatrix und Richtungskosinus (3d) ◆ Drehmatrix3d.m

🔧 Aufgabe 2.16

1. Gegeben sei ein zweidimensionaler Spaltenvektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Wie lauten die Koordinaten des Vektors, den man erhält, wenn man v
 - a) um 45° ,
 - b) um 90° ,
 - c) um 180°
dreht?

2. Die aus der Definition (2.58) bekannten Koordinateneinheitsvektoren e_1 und e_2 werden um einen gegebenen Winkel α gedreht. Bestimmen Sie die Koordinaten der gedrehten Vektoren e'_1 und e'_2 .

Wie aus Aufgabe 2.16,2 hervorgeht, stehen in den Spalten der Drehmatrix die Vektoren, die durch Drehung der Koordinateneinheitsvektoren entstehen; vgl. insbesondere die Ergebnisse (L.5) und (L.6). Bezeichnen wir die Drehmatrix mit R und ihre Elemente mit r_{ij} , also

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \tag{2.205}$$

so ergibt sich aus Bild 2.31 und der Beziehung $\pm \sin \alpha = \cos(90^\circ \mp \alpha)$

$$r_{11} = \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1), \quad (2.206) \qquad r_{12} = \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2), \quad (2.208)$$

$$r_{21} = \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_1), \quad (2.207) \qquad r_{22} = \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2). \quad (2.209)$$

Die Elemente der Drehmatrix sind also die Kosinuswerte der Winkel zwischen den originalen und den gedrehten Koordinateneinheitsvektoren. Dieses Konzept lässt sich direkt auf drei und mehr Dimensionen übertragen: Eine Drehung wird durch eine Matrix beschrieben, die die Kosinuswerte der Winkel zwischen den originalen und den gedrehten Koordinateneinheitsvektoren enthält. So ist die 3d-Drehmatrix durch

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_3) \\ \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_1) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3) \\ \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_1) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_2) & \cos \sphericalangle(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}'_3) \end{pmatrix} \quad (2.210)$$

definiert. Auch hier stehen in den Spalten der Drehmatrix die gedrehten Koordinateneinheitsvektoren \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 , \mathbf{e}'_3 . Die Kosinuswerte aus (2.206) bis (2.209) und (2.210) werden **Richtungskosinus** genannt. Analog zu Satz 2.8 gilt

Satz 2.9

Ein 3d-Vektor wird gedreht, indem man ihn von links mit der Drehmatrix aus (2.210) multipliziert.

Da der zu drehende Vektor von links mit der Drehmatrix multipliziert wird, sind bei mehreren aufeinander folgenden Drehungen die entsprechenden Matrizen der Reihe nach *von rechts nach links* zu multiplizieren. Als Beispiel wird in Bild 2.33 zunächst um den Winkel ϕ um die z -Achse, danach um θ um die x -Achse und schließlich um ψ um die z -Achse gedreht. Die daraus resultierende Gesamtdrehung erhält man durch Multiplikation der den Teildrehungen entsprechenden Matrizen in der in Bild 2.33 dargestellten Reihenfolge. Bei den Drehungen um die x -Achse steht in der ersten Spalte der Vektor \mathbf{e}_1 , da dieser Koordinateneinheitsvektor unverändert bleibt. Entsprechend steht bei der Drehung um die z -Achse in der dritten Spalte der Vektor \mathbf{e}_3 . Die anderen Elemente der Drehmatrix entsprechen denen der 2d-Drehmatrix aus Satz 2.8. Umgekehrt entdeckte EULER, dass jede 3d-Drehung durch drei Teildrehungen obiger Art zusammengesetzt werden kann¹. Daher werden ϕ , θ und ψ als **Eulersche Winkel** bezeichnet. Die Achsenreihenfolge $z - x - z$ hat gegenüber der vielleicht suggestiveren Folge $x - y - z$ den Vorteil, dass sich die Transformation von der gedrehten Lage zurück in die Ausgangslage ohne großen Aufwand in derselben Form darstellen lässt: Mit den Bezeichnungen

¹Ein Beweis steht zum Beispiel in [FISCHER 2001].

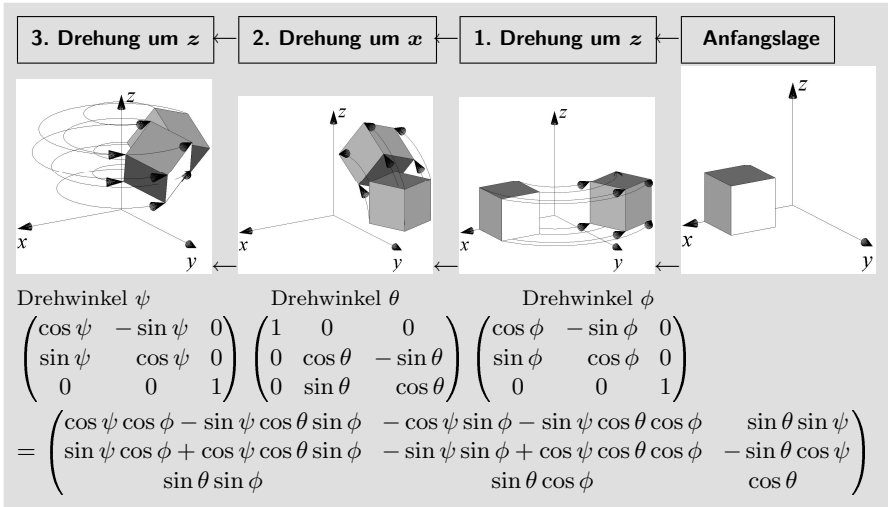


Bild 2.33: EULERSche Winkel

↗ Dreh3d.m

aus Bild 2.33 erhält man diese so genannte **inverse Drehung**, indem man zunächst um $-\psi$ um die z -Achse dreht, danach um $-\theta$ um die x -Achse und schließlich um $-\phi$ um die z -Achse; die Reihenfolge ist also wieder $z - x - z$. Neben der hier angesprochenen Zerlegung einer Drehung durch Teildrehungen um $z - x - z$ bzw. $x - y - z$ gibt es viele andere Möglichkeiten, Drehungen zu beschreiben, zum Beispiel durch Angabe *einer* (im Allgemeinen mit keiner Koordinatenachse übereinstimmenden) Drehachse und *eines* Drehwinkels. Gebräuchliche Darstellungen und Transformationen zwischen diesen sind in [NITSCHKE, KNICKMEYER 2000] zusammengefasst.

Beispiel 2.6

Zu der durch $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\sqrt{3} & \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ definierten Drehung¹ sind die EULERSchen Winkel zu bestimmen.

Lösung: Wir vergleichen die Matrix \mathbf{R} mit der Darstellung aus Bild 2.33. Insbesondere gilt für die Elemente r_{32} und r_{31}

$$(r_{32} =) \sin \theta \cos \phi = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad (r_{31} =) \sin \theta \sin \phi = -\frac{1}{4}. \quad (2.211)$$

¹Wir setzen hier voraus, dass \mathbf{R} eine Drehung beschreibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ und $\det \mathbf{R} = 1$ ist; vgl. auch (2.218) und Satz 2.10.

Dies sind Polarkoordinaten mit $r = \sin \theta$ und $t = \phi$. Also ist nach (2.97, 2.98) oder mit Taschenrechnerunterstützung [(2.100) mit $x = r_{32}$, $y = r_{31}$]

$$(r =) \sin \theta = \frac{1}{2}, \quad (2.212) \quad (t =) \phi = 210^\circ \text{ oder } -150^\circ. \quad (2.213)$$

Aus

$$(-r_{23} =) \sin \theta \cos \psi = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad (r_{13} =) \sin \theta \sin \psi = \frac{1}{4} \quad (2.214)$$

folgt ähnlich [(2.100) mit $x = -r_{23}$, $y = r_{13}$]

$$(r =) \sin \theta = \frac{1}{2}, \quad (2.215) \quad (t =) \psi = 150^\circ. \quad (2.216)$$

Ferner ergibt sich aus $(r_{33} =) \cos \theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin \theta \stackrel{(2.212)}{=} \stackrel{(2.215)}{=} \frac{1}{2}$ wieder mit (2.97) und ggf. Taschenrechnerunterstützung [(2.100) mit $x = r_{33}$, $y = \sin \theta$] der noch fehlende EULER-Winkel $\theta = 30^\circ$. ■

🔗 Aufgabe 2.17 (Rotationsmatrix und Eulersche Winkel)

- Der Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird um 90° um die z -Achse, danach um 135° um die x -Achse und schließlich um 210° um die z -Achse gedreht. Berechnen Sie die Koordinaten des gedrehten Vektors.
- a) Berechnen Sie die Rotationsmatrix, die entsteht, wenn um 60° um die z -Achse, danach um 30° um die x -Achse und schließlich um 45° um die z -Achse gedreht wird.
b) Ein Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ wird wie eben beschrieben gedreht. Wie lauten die Koordinaten des gedrehten Vektors?

- Berechnen Sie für die Matrix $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{8}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{8}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- die EULERSchen Winkel der durch \mathbf{R} definierten Drehung,
- die Determinante $\det \mathbf{R}$,
- das Matrizenprodukt $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$.

Das Ergebnis von Aufgabe 2.17,3b ist $\det \mathbf{R} = 1$. Das ist kein Zufall. Der absolute Betrag der Determinante ist nach (D1) auf Seite 89 das Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelsplats. Beschreibt \mathbf{R} eine Drehung, so stehen in den Spalten von \mathbf{R} die gedrehten Koordinateneinheitsvektoren \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 , \mathbf{e}'_3 . Diese haben die Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander; das von ihnen aufgespannte Parallelsplat ist also ein Würfel der Kantenlänge 1 und hat damit das Volumen 1; die Determinante ist also ± 1 . Da bei einer

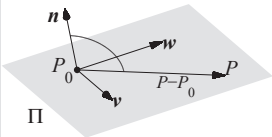
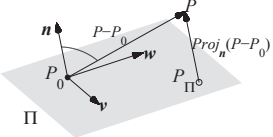
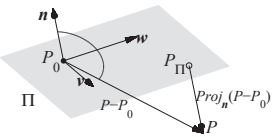
		
(a) P auf Π	(b) P auf der \mathbf{n} zugewandten Seite von Π	(c) P auf der \mathbf{n} abgewandten Seite von Π
$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.102)$ bzw. $P \cdot \mathbf{n} = P_0 \cdot \mathbf{n}, \quad (3.103)$	$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} > 0, \quad (3.104)$ bzw. $P \cdot \mathbf{n} > P_0 \cdot \mathbf{n}, \quad (3.105)$	$(P - P_0) \cdot \mathbf{n} < 0, \quad (3.106)$ bzw. $P \cdot \mathbf{n} < P_0 \cdot \mathbf{n}, \quad (3.107)$
oder mit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, P_0 \cdot \mathbf{n} = d$ die vielleicht vertrautere Form		
$ax + by + cz = d, \quad (3.108)$	$ax + by + cz > d, \quad (3.109)$	$ax + by + cz < d. \quad (3.110)$
In allen drei Fällen ist		
$P_\Pi = P - (\mathbf{n}^0 \cdot (P - P_0))\mathbf{n}^0, \quad (3.111) \quad \mathbf{n}^0 \cdot (P - P_0) = d(P, \Pi). \quad (3.112)$		

Bild 3.24: HESSEsche Normalform einer Ebene im Raum

◆ Hesse3d.m

Ordnung in eine der Flächen (a) bis (n) aus Bild 3.25 überführen. Die ersten Fälle führen auf einen Punkt (a), eine Gerade (b), eine Ebene (c), zwei Ebenen [(d),(e)], Zylinder [(f) bis (h)] oder Kegel (i). Die Flächen (c) bis (i) sind eben oder lassen sich verzerrungsfrei auf eine Ebene abwickeln; man spricht daher von **abwickelbaren** Quadriken. Alle weiteren Fälle führen auf nicht abwickelbare Flächen; genauer auf Ellipsoide, Paraboloiden und Hyperboloide. Wird ein Ellipsoid (j) in Normallage parallel zu einer der Koordinatenebenen (x, y) , (x, z) oder (y, z) geschnitten, so entsteht eine Ellipse. Bei den Paraboloiden (k) und (l) führen die Schnitte parallel zur (x, z) - oder (y, z) -Ebene auf Parabeln, während die Schnitte parallel zur (x, y) -Ebene den Typ spezifizieren: Beim elliptischen Paraboloid (k) entstehen Ellipsen; beim hyperbolischen Paraboloid (l, insbesondere zweite Figur) Hyperbeln. Schnitte der Hyperboloide (m) und (n) parallel zur (x, z) - oder (y, z) -Ebene liefern stets Hyperbeln; zur (x, y) -Ebene parallele Schnitte produzieren dagegen Ellipsen. Bei den elliptischen Quadriken (f),(i),(j),(k) und den Hyperboloiden (m),(n) werden im Fall $a = b$ die entsprechenden Schnittellipsen zu Kreisen, und die jeweilige Fläche zweiter Ordnung ist rotationssymmetrisch. Eine **Parameterdarstellung** kann in diesen Spezialfällen durch Rotation einer Strecke, Ellipse, Parabel oder Hyperbel gemäß (3.81) gewonnen werden. Beim Hyperboloid entscheidet dabei die Rotationsachse über den Typ der entstehenden Fläche: Rotiert eine wie in Bild 3.14(i) normal liegende Hyperbel um die



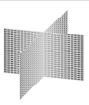




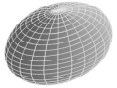
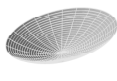

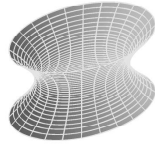
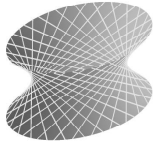
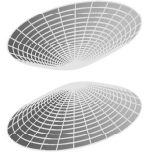
	(a) Punkt $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0$	(3.113)	
	(b) Gerade $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$	(3.114)	
abwickelbare Quadriken	(c) eine Ebene $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 0$	(3.115)	
	(d) zwei parallele Ebenen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$	(3.116)	
		(e)	
		(f)	
		(g)	
		(h)	
		(i)	
	(e) zwei sich schneidende Ebenen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0$	(3.117)	
	(f) Elliptischer Zylinder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	(3.118)	
	(g) Parabolischer Zylinder $x^2 = 2py$	(3.119)	
(h) Hyperbolischer Zylinder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	(3.120)		
(i) Elliptischer Doppelkegel $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2$	(3.121)		
Paraboloide, Ellipsoid		(j)	
		(k)	
		(l)	
	(j) Ellipsoid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	(3.122)	
(k) Elliptisches Paraboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 2z$	(3.123)		
(l) Hyperbolisches Paraboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 2z$	(3.124)		
Hyperboloide		(m)	
			
		(n)	
(m) Einschaliges Hyperboloid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	(3.125)		
(n) Zweischaliges Hyperboloid $-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	(3.126)		

Bild 3.25: Flächen zweiter Ordnung (Quadriken)

y -Achse, so entsteht ein einschaliges Hyperboloid wie in (m); bei Rotation um die x -Achse ein zweischaliges wie in (n). Parameter- und Gleichungsdarstellungen für nicht rotationssymmetrische Ellipsoide, Hyperboloide sowie elliptische Paraboloid, Kegel und Zylinder erhält man durch Streckung und/oder Stauchung längs der Koordinatenachsen. Das hyperbolische Paraboloid ist die einzige nicht degenerierte Fläche zweiter Ordnung, die sich nicht durch Streckung/Stauchung einer Rotationsfläche darstellen lässt. Es kann jedoch ebenso wie das einschalige Hyperboloid aus zwei Scharen von Geraden erzeugt werden [(1, dritte Figur) und (m, zweite Figur)]. Deshalb finden sich Anwendungen des einschaligen Hyperboloides wie in Bild 3.19 dargestellt und des hyperbolischen Paraboloides bei Dachflächen (Haus der Kulturen der Welt, Berlin) und Übergangsflächen im Straßenbau. Mehr über Flächen zweiter Ordnung (Anwendungen, Parameterdarstellungen, ...) findet man in [GOTTWALD et al. 1995, BÄR 2001, GIERING, SEYBOLD 1987].

3.3 Abstände und Schnitte

3.3.1 Abstand eines Punktes von einer Kurve oder Fläche

Sind A ein Punkt und y eine Kurve oder Fläche, so ist der **Abstand** $d(A, y)$ definiert als der kürzeste Abstand zwischen A und einem auf y liegenden Punkt. Ist der Punkt, an dem dieser kürzeste Abstand angenommen wird, eindeutig bestimmt, so bezeichnen wir ihn hier mit A_y . Ist $y = g$ eine Gerade g , so ist $A_y = A_g$ der **Fußpunkt des Lotes von A auf g** . Ist g wie in Bild 3.1(b) durch $P(t) = P_0 + tv$ parametrisiert, so hat A_g die Koordinaten

$$A_g \stackrel{\text{Bild 3.26}}{=} P_0 + \text{Proj}_{\mathbf{v}}(A - P_0) \stackrel{(2.55)}{=} P_0 + \mathbf{v}^0 \mathbf{v}^{0T}(A - P_0). \quad (3.127)$$

Der **Abstand zwischen dem Punkt A und der Geraden g** ist daher

$$d(A, g) = d(A, A_g) \stackrel{(3.127)}{=} |A - P_0 - \mathbf{v}^0 \mathbf{v}^{0T}(A - P_0)| \quad (3.128)$$

$$\stackrel{(2.36)}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - 2(\mathbf{v}^0 \cdot (A - P_0))^2 + |\mathbf{v}^0 \mathbf{v}^{0T}(A - P_0)|^2} \quad (3.129)$$

$$\stackrel{(2.14)}{=} \stackrel{(2.32)}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - 2(\mathbf{v}^0 \cdot (A - P_0))^2 + (\mathbf{v}^0 \cdot (A - P_0))^2 |\mathbf{v}^0|^2} \quad (3.130)$$

$$\stackrel{|\mathbf{v}^0|=1}{=} \sqrt{|A - P_0|^2 - (\mathbf{v}^0 \cdot (A - P_0))^2} \quad (3.131)$$

$$\stackrel{(2.165)}{=} V(\mathbf{v}^0, A - P_0) \stackrel{(2.162)}{=} |\mathbf{v}^0 \times (A - P_0)|. \quad (3.132)$$

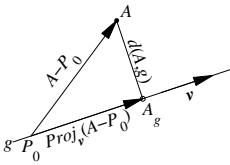


Bild 3.26: Abstand
 Punkt $A \leftrightarrow$
 Gerade $g \quad \blacktriangleleft dAg.m$

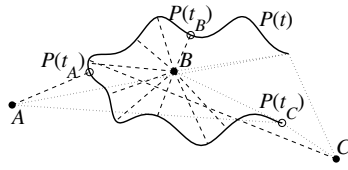


Bild 3.27: Abstand
 Punkt $A \leftrightarrow$ Kurve $P(t) \quad \blacktriangleleft dAP.m$

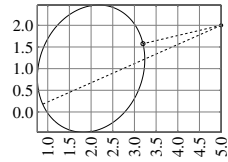


Bild 3.28: *Beispiel*
 Abstand Punkt \leftrightarrow
 Ellipse \blacktriangleleft BspdAP.m

Etwas komplizierter ist die Situation für den (kürzesten) **Abstand zwischen einem Punkt A und einer parametrisierten Kurve $P(t)$** : In Bild 3.27 wird der kürzeste Abstand zwischen dem Punkt A und der Kurve $P(t)$ im Punkt $P(t_A)$ angenommen. Auch hier steht der Verbindungsvektor $P(t_A) - A$ senkrecht auf der Kurve. Da die Kurvenrichtung durch $P'(t_A)$ gegeben ist, gilt nach Satz 2.2

$$(A - P(t_A)) \cdot P'(t_A) = 0; \tag{3.133}$$

der Parameter t_A des A nächstgelegenen Kurvenpunktes ist also die Lösung dieser Gleichung. Die Lösung ist im Allgemeinen nicht eindeutig; im Extremfall kann es unendlich viele Lösungen geben ($P(t)$ Kreis, A dessen Mittelpunkt). Weiter garantiert (3.133) nur, dass die Verbindung zwischen A und $P(t_A)$ senkrecht auf der Kurve steht. Wie das Beispiel des Punktes B aus Bild 3.27 zeigt, kann es mehrere solcher Kurvenpunkte geben, von denen nur einer minimalen Abstand zu B hat. Das Beispiel des Punktes C zeigt schließlich, dass bei nicht geschlossenen Kurven der minimale Abstand auch an einem der Randpunkte angenommen werden kann, ohne dass dieser (3.133) erfüllt. *In allen Fällen wird der kürzeste Abstand zwischen Punkt und Kurve in einem der durch (3.133) definierten Punkte (in Bild 3.27 gestrichelt --- markierte Abstände) oder in einem Randpunkt (in Bild 3.27 punktiert ... markierte Abstände) angenommen.*

Beispiel 3.5

Gegeben sind der Punkt $A(5; 2)$ sowie eine gegenüber der Normalla-ge um 70° gedrehte und um $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschobene Ellipse mit den Halbachsen 1.5 und 1.2 (Bilder 3.3 und 3.28).

Gesucht ist der A nächstgelegene Ellipsenpunkt sowie dessen Abstand zu A .

Lösung: Da die Ellipse eine geschlossene Kurve ist, gibt es hier keine Randpunkte und der minimale Abstand wird an einem Ellipsenpunkt angenommen, der die Gleichung (3.133) erfüllt. Das von (3.18) ausgehende Aufstellen

Index

- Abstand
 Ellipse \leftrightarrow Ellipse 136, 138
 EUKLIDischer 65, 66
 Fläche \leftrightarrow Fläche 136
 geodätischer 65, 66
 Gerade \leftrightarrow Gerade 136
 Kurve \leftrightarrow Fläche 136
 Kurve \leftrightarrow Kurve 136
 parallele Geraden 137
 Punkt \leftrightarrow Ebene 130, 135
 Punkt \leftrightarrow Ellipse 133
 Punkt \leftrightarrow Fläche 135, 136
 Punkt \leftrightarrow Gerade 117,
 118, 132, 133, 135
 Punkt \leftrightarrow Kurve 133
 sphärischer 66, 83
 windschiefe Geraden 136,
 137
- abwickelbar 130, 131
- Addition und Subtraktion
 von Matrizen 56
- Ähnlichkeit 17, 100
- Ähnlichkeitssätze 18
- allgemeine Lage 107, 116,
 121, 129, 151, 152
- Altgrad 63, 64
- Ankreismittelpunkt 13
- Antennenausrichtung 111
- \arctan_2 76
- Astronavigation 144
- Asymptoten 121
- atan2** 76
- Außenwinkel 11
- Aufbauverfahren 157
- Aufpunkt 106, 122
- Aufriss 146
- Augenpunkt 146
- Axonometrie 147, 157, 160,
 161
- Azimet 78, 111
- Bewegung 17
- Böschungswinkel 43, 118
- Bogenmaß 63, 64
- Breitengrad 78
- Breitenkreis 81
- Brennpunkt 120
- Brennstrahlen 121
- Brückenprofil 10
- Cart** 77
- cart2pol** 76, 78
- cart2sph** 79
- CAUCHY-SCHWARZsche
 Ungleichung 63
- CAVALIERisches Prinzip 26,
 42
 für Kegel 42
 für Zylinder 42
- cross** 88
- Dach 139
 -ausmittlung 153
 Parallelprojektionen 147
 Axonometrie 160, 161
 Dimetrie 160, 161
 Isometrie 161
 kotierte Projektion
 152, 153
 Trimetrie 161
 Zweifafelprojektion 154
- rechnerisch 169
- Projektionen 149
- Typen 153
- wahre Gestalt der
 Seitenflächen 156
- Zentralprojektionen 148,
 149
- darstellende Geometrie 9,
 146
- DEG** , degree 64
- det** 85, 90
- Determinanten 85, 90, 92,
 98, 100
 -Multiplikationssatz 102
- diag** 59
- Diagonalelement 59
- Diagonalmatrix 59
 Veranschaulichung 100
- Differenzialgeometrie 15
- Dimetrie 148, 159–161
- DIN A... 22, 24
- Division einer Matrix
 durch einen Skalar 58
- DMS** 64
- Doppelkegel 124, 131
- Doppelkreiskegel 124
- dot** 58
- Drachenviereck 14, 16, 19,
 68
- Drehmatrix 93–95
- Drehspiegelung 98, 99
- Drehung 17, 93, 95, 99
 inverse 96
- Dreibein 147
- Dreieck 10, 11
 Ähnlichkeitssätze 18
 Ankreise 13
 Außenwinkel 11
 -halbierende 13
 Flächeninhalt 27, 29
 gleichschenkliges 11
 gleichseitiges 11
 Höhe 12, 27
 Höhenschnittpunkt 12,
 162
 Inkreis 12, 162
 Innenwinkel 11
 Klassifikation 11
 Kongruenzsätze 18, 162
 SsW und sSW 35
 mit drei rechten Winkeln
 13
 Mittelsenkrechte 12
 rechtwinkliges 11, 162
 Schwerpunkt 12, 162
 Seitenhalbierende 12
 spitzwinkliges 11
 stumpfwinkliges 11, 162
 Umkreis 12, 162
 Winkelhalbierende 12
- Dreiecksungleichung 61, 162
- e_1, e_2, \dots 69–71, 86, 91,
 147
- Ebene 123, 130
- Einheitsmatrix 60
- Einheitsvektor 60
- Einschneideverfahren 157
- Elevation 78, 111
- Ellipse 118, 119
 Flächeninhalt 127
 Gleichungs-

- darstellung 115, 120
- Parameterdarstellung 106, 107, 121
- Umfang 114
- Ellipsenbogen, Länge 114
- Ellipsenfläche 123
- Ellipsoid 127, 130, 131
 - Volumen 51, 128
- Entwicklungssatz 91
- Erdmessung 9
- erstprojizierend 154
- EUKLID
 - ische Länge 65
 - ische Norm 65
 - ischer Abstand 65, 66
 - ischer Vektorraum 65
- EULERSche Winkel 95, 96
- EULERScher Polyedersatz 52
- Exzentrizität 121
- Exzess 15
- eye** 60
- Fahrradrahmen 10
- FALKSschema 57
- Fass 51
- FEUERBACHkreis 13
- Finite Elemente 11
- Fläche 24, 122
 - Gleichungsdarstellung 129
 - Parameterdarstellung 122
 - Umfang 24
 - zweiter Ordnung 129–132
- Flächeninhalt 24, 25, 40
 - Dreieck 27, 29
 - Ellipse 127
 - Kreis 25, 127
 - Kreissektor 65
 - Paraboloid 128
 - Parallelogramm 26, 84, 88
 - parametrisierte Fläche 126
 - Rechteck 25, 26
 - Rotationsfläche 45
 - Rotationsparaboloid 128
 - Trapez 27
 - Vieleck 29, 30
- Fluchtpunkt 149
- fminsearch** 138
- frei verfügbare Software 6
- freier Vektor 54
- fsolve** 138
- Funktionskurve 118
- Ganghöhe 47
- GAUSS 55
- GAUSSsche Trapez- und Dreiecksformel 30
- gegensinnig 17
- genormte
 - Dimetrie 148, 159–161
 - Isometrie 148, 159, 161
- geodätischer Abstand 65, 66
- geographische Koord. 78, 79
- geometrischer Vektor 54
- Gerade 106, 116, 117
- Geschwindigkeitsvektor 109
- gleichschenkliges Dreieck 11
- gleichseitiges Dreieck 11
- gleichsinnig 17
- Gleichungsdarstellung
 - Ebene 130
 - Ellipse 115, 120
 - Fläche 129
 - zweiter Ordnung 131
 - Funktionskurve 118
 - Gerade 117
 - Hyperbel 120
 - Kreis 114, 115
 - Kugel 129
 - Kurve 114
 - zweiter Ordnung 119
 - Parabel 120
 - Rotationsfläche 129
- Gon und gon 64
- GON**, gon 64
- Grad 63
- Grad und grad 64
- GRAD**, grad 64
- GRASSMANNscher
 - Entwicklungssatz 91
- Großkreis 66, 108, 109
- Großkreisbogen
 - Parameterdarstellung 108, 109
- Grundaufgabe 150
- Grundriss 146, 150, 153
- GULDINSche Regeln 45, 46
- Halbkreissschwerpunkt 49
- Hauptachsen-
 - transformation 122, 129
- Hauptscheitel 120
- Helix 47, 108
- HERONische Formel 29
- HESSsche Normalform 116, 117, 130
- Hexaeder 53
- HMS** 64
- Höhe
 - Dreieck 12, 27
 - Kegel 44
 - Parallelogramm 26
 - Trapez 27
 - Zylinder 42
- Höhenlinien 152
- Höhenschnittpunkt 12, 162
- Höhenschnittverfahren 152
- homogene Koord. 103, 149
- Horizontalspur 154
- Hund-Herrchen-Problem 113
- Hyperbel 118–121
- Hyperboloid 124, 130, 131
 - Parameterdarstellung 125
 - Volumen 51
- Hyperpotenuse 33
- Icosaeder 53
- Ingenieuraxonomie 148
- Inkreismittelpunkt 12, 162
- Innenwinkel 11
- inverse Drehung 96
- Isometrie 148, 161
- kartesische Koord. 9, 54, 68, 73
- Kathete 33
- Kavalierperspektive 157, 158
- Kegel 43, 124, 131
 - Mantelfläche 46
 - Parameterdarstellung 123, 125
 - Volumen 44, 51
- Kegelschnitt 118, 119, 122
- Kegelstumpf 124
- Kettenlinie 112
- Körper 40, 122
- komplanar 91
- Kongruenz 17, 99
- Kongruenzsätze 18, 162
 - SsW und sSW 35

- Konoid 51
 konvex 12, 14, 52
 Koordinaten
 geographische 78, 79
 homogene 103, 149
 kartesische 9, 54, 68, 73
 krummlinige 73
 parallele 73
 polare 74, 76
 rechtwinklige 73
 schiefwinklige 73
 -einheitsvektor 69–71, 86, 91
 -flächen 81
 -gitter 73
 -linien 74, 81, 106
 -transformation 71
 Kosinussatz 34, 62
 kosmischer Körper 53
 Kote 146, 150, 157
 kotierte Projektion 146, 150
 Kreis 19
 Flächeninhalt 25, 127
 Gleichungsdarstellung 114, 115
 Parameterdarstellung 106, 107
 Umfang 25, 114
 Kreisbogen
 Länge 65, 114
 Parameterdarstellung 106, 107
 Kreisfläche 123
 Kreiskegel 123, 124
 Kreiskegelstumpf 124
 Kreissektor
 Flächeninhalt 65
 Kreiszyylinder 123, 124
 Kreiszyylinderkoordinaten 77
 Kreuzprodukt 88, 90, 91
 Kreuzriss 146, 153
 Krümmung 15
 krummlinige Koord. 73
 Kühlturm 125
 Kugel
 Gleichungsdarstellung 129
 Oberfläche 127
 Parameterdarstellung 123
 Volumen 48, 51
 Kugelkoordinaten 78, 80
 Kurs 109
 Kurve 106
 Gleichungsdarstellung 114
 Parameterdarstellung 106
 zweiter Ordnung 119, 122
 Kurvenlänge 113
 Länge
 Ellipsenbogen 114
 Helix 47
 Kreisbogen 65, 114
 Kurve 113
 Schraublinie 47
 Vektor 58, 62
 EUKLIDISCHE 65
 Rechenregeln 61
 Längengrad 78
 Längengrad 81
 Landmessung 9
 Leitkurve
 Konoid 51
 Translationsfläche 46
 Translationskörper 46
 Leitlinie 120
 Lineare Algebra 6, 54
 lineare Transformation 99
 Lot auf eine Ebene 150
 Mantelfläche 46, 128
 Mantellinie 43
 MAPLE 55
 MATHCAD 55
 MATHEMATICA 55
 MATLAB 5, 6, 55
 Matrix 54
 orthogonale 71, 98, 99
 Rechenregeln 60
 Veranschaulichung 99–101
 Verknüpfungsregeln 61
 Mehrfafelprojektion 146
 Meridian 81
 Meter und Seemeile 84
 mgon 64
 Militärperspektive 157, 158
 Milligon 64
 Minute 63, 64
 Mittelpunktswinkel 37, 63
 Mittelsenkrechte 12
 Möndchen des HIPPOKRATES 36
 Multiplikation einer Matrix
 mit einem Skalar 55
 mit einer Matrix 57, 58
 FALKSCHEMA 57
 Veranschaulichung 102
 MuPAD 55
 Nebenseitel 121
 Neugrad 64
 Neunpunktkegel 13
 Norm 65
 norm 59
 Normalenvektor 116, 129
 Normallage 107, 116, 121, 129
 Normalprojektion 148
 Normalschnittebene 151, 154
 normierter Vektor 60
 Nullmatrix 59
 Nullvektor 59
 numerische Exzentrizität 121
 O-Matrix 55
 Oberfläche 24, 40
 Kugel 127
 Rotationsfläche 45
 Torus 45
 Octave 55
 Oktaeder 53
 Ordnern, Ordnungslinie 154
 orientierter Winkel 75, 86
 Orientierung
 einer Transformation 100
 und Richtung 56, 60
 zweier ebener Vektoren 86
 orthogonale
 Axonometrie 148, 157
 Matrix 71, 98, 99
 Parallelprojektion 148
 Zerlegung 66
 Zweifafelprojektion 153
 Orthogonalraum 68
 Ortskreis 38–40, 164
 Ortslinien 120
 Ortsvektor 54, 56
 Ox 55
 Papierformat 22, 24
 Parabel 118–121

- Paraboloid 130, 131
 Flächeninhalt 128
 Parameterdarstellung 128
 Volumen 51
 Parallelkoordinaten 73
 Parallelogramm 14, 16, 19, 61
 Flächeninhalt 26, 84, 88
 Höhe 26
 Parameterdarstellung 123
 Parallelprojektion 146, 147
 Parallelspat 88, 89, 123
 Parameterbereich 106
 Parameterdarstellung
 Ebene 123
 Ellipse 106, 107, 121
 Ellipsenfläche 123
 Ellipsoid 127
 Fläche 122
 zweiter Ordnung 132
 Funktionskurve 118
 Gerade 106
 Großkreisbogen 108, 109
 Helix 109
 Hyperbel 121
 Hyperboloid 125
 Körper 122
 Kegel 123, 125
 Kreis 106, 107
 Kreisbogen 106, 107
 Kreisfläche 123
 Kreiskegel 123
 Kreiszyylinder 123
 Kugel 123, 127
 Kurve 106
 zweiter Ordnung 119
 Parabel 121
 Paraboloid 128
 Parallelogramm 123
 Parallelspat 123
 Radlinie 113
 Rotations-
 fläche 124
 hyperboloid 125
 paraboloid 128
 Schleppkurve 113
 Schraubfläche 126
 Schraublinie 109
 Strahl 106
 Strecke 106
 Torus 124
 Traktrix 113
 Translationsfläche 125
 Viertelebene 123
 Zykloide 113
 Zylinder 123, 125
 Pentagonododekaeder 53
 Peripheriewinkel 37
 planar 108
 platonischer Körper 53
Pol 77
pol2cart 76, 78
 Polarkoordinaten 74, 76
polyarea 31
 Polyeder 40, 52, 53
 Polygon 11, 14
 Polygonzug 11, 14
P→R 76, 78
 Prisma 42
 Volumen 42, 51
 Prismatoid, Prismoid 51
 Profilkurve 44, 46
 Projektion 146
 auf eine Ebene 146, 149
 auf einen Vektor 67
 Projektionsmatrix 68, 149
 projizierend 151, 152
 Pyramide 43
 Volumen 44, 51
 PYTHAGORAS 33
 Erweiterung für ähnliche
 Figuren 36
 Länge n -dimensionaler
 Vektoren 58
 Umkehrung 34
 Verallgemeinerung
 (Kosinussatz) 34, 62
 Quader 41
 Quadrat 14, 19
 Quadrik 122, 129, 131
RAD , rad 64
 Radiant 63, 64
 Radlinie 112
 Raum-Zeit-Kontinuum 15
 Raute 14, 19
Rec 77
 Rechteck 14, 19
 Flächeninhalt 25, 26
 Verformung 10
 rechtwinklige Koord. 73
 rechtwinkliges Dreieck 11, 162
 regelmäßiges Polyeder 53
 regelmäßiges Vieleck 14
 reguläres Polyeder 53
 reguläres Vieleck 14
 Relativitätstheorie 15
 Rhombus 14
 Richtung und Orientierung
 56, 60
 Richtungs-
 vektor 60, 106, 122
 Richtungskosinus 95
 Rohrkörper 47
 Rotation einer Strecke 124
 Rotations-
 fläche 44, 45, 124, 129
 hyperboloid 124, 125
 körper 44, 45, 48, 128
 paraboloid 128
R→P 76, 78
 S-PLUS 55
 Scheitel 120, 121
 Scheitelgleichung 121
 schiefe
 Axonometrie 148, 157
 Parallelprojektion 148
 schiefwinklige Koord. 73
 Schiff-Hafen-Leuchtturm-
 Kirche-Problem 40, 164
 Schleppkurve 113
 Schnitt
 allgemein 143
 Ebene/Ebene 141, 150
 Ebene/Ebene/Ebene 130
 Ebene/Gerade 142, 150
 Gerade/Ebene 142, 150
 Gerade/Gerade 141
 Gerade/Kugel 144
 Schraubfläche 47, 126
 Schraubkörper 47
 Schraublinie 47, 108
 Schraubung 47
 Schwerpunkt 162
 Dreieck 12
 Halbkreis 49
 Vieleck 31
 SciLab 55

- Sechspunktekreis 11
 Seelenradius 45
 Seeemeile und Meter 84
 Sehne 37
 Sehnenviereck 37
 Seitenhalbierende 12
 Sekunde 63, 64
 Semiperimeter 29
 sexagesimale Unterteilung
 63, 64
 Skalarprodukt 58
 sm 84
 Spatprodukt 88
 spezielle Lage 151, 152
sph2cart 79
 sphärischer Abstand 66, 83
 sphärischer Exzess 15
 Spiegelung 17, 99
 spitzwinkliges Dreieck 11
 Spur 150, 152, 154
 SsW und sSW 35
 Standlinie 29
 Stauchung 100
 sternförmig 12, 14, 52
 Sternpunkt 12, 14
 Strahl 106
 Strahlensätze 20–22
 Strecke 106
 Streckung 100
 stumpfwinkliges Dreieck 11,
 162
 Summe der Innenwinkel 13
 Tangentenvektor 109
 tangentielle Komponente
 112
 Tangentialebene 135
 Tetraeder 53
 THALES 37
 Torus 45, 124
 Traktrix 113
 Transformation, lineare 39
 Translationsfläche 46, 125
 Translationskörper 46
 Transponieren 55
 Trapez 14
 Flächeninhalt 27
 Höhe 27
 Trapez- und
 Dreiecksverfahren 29
 Trimetrie 148, 159, 161
 überschlagen 14
 Umfang
 Ellipse 114
 Fläche 24
 Kreis 25, 114
 Vieleck 24
 Umfangswinkel 37
 Umklappung 151, 155
 Umkreismittelpunkt 12, 162
 Umlaufsinn 17
 Vektor 54
 freier 54
 geometrischer 54
 Länge 58, 62
 EUKLIDISCHE 65
 Rechenregeln 61
 normierter 60
 Rechenregeln 60
 Verknüpfungsregeln 61
 -produkt 88, 90, 91
 -raum 61
 EUKLIDISCHER 65
 Veranschaulichung
 Diagonalmatrix 100
 Matrix 100
 Matrizenmultiplikation
 102
 orthogonale Matrix 99
 Verschiebung 17
 verschränkt 14
 Vieleck 11, 14
 Flächeninhalt 29, 30
 konvex 12, 14
 mit Selbstüberschneidung
 14
 regelmäßiges 14
 reguläres 14
 Schwerpunkt 31
 sternförmig 12, 14
 Umfang 24
 Vielflächner 52
 Viereck 10, 14, 19, 37
 zu vier Seitenlängen und
 einem Innenwinkel
 11
 Viertelebene 123
 Vogelperspektive 157, 158
 Volumen 40
 Berechnung mittels
 Schnittflächen 49, 50
 Ellipsoid 51, 128
 Fass 51
 Hyperboloid 51
 Kegel 44, 51
 Kugel 48, 51
 Paraboloid 51
 Parallelspat 89
 parametrisierter Körper
 126
 Polyeder 52
 Prisma 42, 51
 Prismatoid, Prismoid 51
 Pyramide 44, 51
 Quader 41
 Rohrkörper 47
 Rotationskörper 45, 48
 Torus 45
 Translationskörper 46
 Zylinder 42, 46, 51
 wahre Gestalt 155
 wahre Länge 150, 155
 wahrer Winkel 150, 155
 windschief 124, 136, 137
 Winkel, Orientierung 75, 86
 Winkel zwischen Vektoren
 62, 63, 86, 88
 Winkeleinheiten 63
 Winkelhalbierende 12, 13
 Winkelsumme 13
 Würfel als platonischer
 Körper 53
 Wulstradius 45
 Zeichenebene 150
 Zenit 112
 Zenitdistanz 80, 144
 Zentralprojektion 146, 148,
 149
 Zentriwinkel 37
zeros 60
 Zweitafelprojektion 146,
 153
 zweitprojizierend 154
 Zykloide 112
 Zylinder 41, 124, 131
 Parameterdarstellung
 123, 125
 Volumen 42, 46, 51
 Zylinderkoordinaten 78